LA RESONANCIA DE LA TASA DE INTERES Y LA IMPORTANCIA DE LAS EQUIVALENCIAS ENTRE TASAS

*Carlos Arturo Londoño Orozco**
*Nelson Londoño Pineda***

SÍNTESIS

El presente documento propone una metodología para calcular equivalencia entre tasas de interés, cuando se están analizando la rentabilidad de una inversión o el costo de capital de un crédito; este procedimiento permite agilizar los cálculos cuando se involucran tasas de diferente periodicidad y unidad de cuenta.

DESCRIPTORES: *Tasas de interés, inversiones, equivalencia, evaluación, finanzas*

ABSTRACT

This article proposes a methodology to calculate the equivalence between rates of interest, while profitability of an investment or the capital cost of a credit are being analyzed; this process allows to speed up the estimations when different rates of periodicity and account unit are involved.

DESCRIPTORS: *Rate of interest, investment, equivalence, evaluation, finances.*

INTRODUCCIÓN

El concepto de inversión se relaciona con la decisión de prorrogar el consumo actual y seguro por un consumo en un momento posterior y asumiendo un riesgo; dicha decisión no es gratuita dado que se espera obtener una utilidad real, la velocidad con que se aumenta la capacidad de consumo se mide a través de la denominada "tasa de interés". En el mercado financiero actual coexisten diferentes activos financieros en los cuales es posible invertir, a las opciones tradicionales (renta fija y renta variable) se han agregado productos más sofisticados tales como "compras al descubierto de títulos valores", mercado de opciones, de futuros, titularizaciones y documentos representativos de activos subyacentes tales como diversas mercaderías negociadas a nivel mundial (metales, alimentos, combustibles, etc.). Es normal en dichas operaciones involucrar monedas diferentes a la moneda local y ello implica tener en cuenta variables como la inflación y la devaluación del país de origen. La existencia de estas variables obliga

* Ingeniero Industrial. Maestría en Administración Económica y Financiera. Maestro del Programa de Administración de Empresas de la Universidad Católica Popular del Risaralda ,conejo@ucpr.edu.co.

** Administrador de Empresas. Programa Alta Gerencia, Maestro del Programa de Administración de Empresas de la Universidad Católica Popular del Risaralda. Director Programa de Administración de Empresas de la Universidad Católica Popular del Risaralda. nelpirock@ucpr.edu.co.

Recepción de los Artículo: 29 de Mayo de 2007. Aceptación del Artículo por el Cómite Editorial: 23 de Mayo de 2007.

a medir su impacto en la utilidad lograda en aquellas inversiones realizadas en mercados foráneos y/o en productos financieros "exóticos".

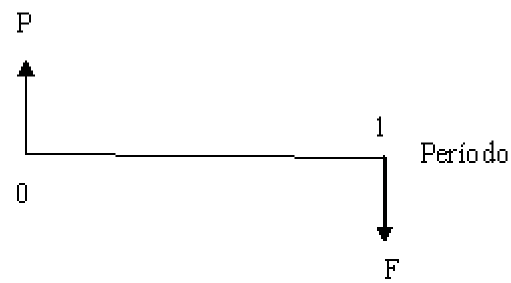
El presente documento tiene por finalidad generar un modelo sencillo, pero eficiente, que permite calcular la rentabilidad de una inversión cuando por su naturaleza se encuentra afectada no sólo por la utilidad que genera en sí, sino adicionalmente por otros elementos exógenos y por tanto incontrolables.

ALGUNOS ELEMENTOS CONCEPTUALES

La relevancia de las tasas de interés radica en que sobre éstas descansa todo el edificio de las finanzas de largo plazo y por ende es la base de los criterios utilizados en la evaluación económica de inversiones, es por ello que la tasa de interés de acuerdo con la situación especifica que se maneje puede tomar entre otros los nombres de: costo de capital (o simplemente costo), rendimiento, tasa interna de retorno (TIR), tasa de interés de oportunidad, tasa mínima de retorno requerida, costo de oportunidad, etc.

Interés (I): desde la óptica de los negocios o las finanzas, se puede definir el interés como el costo que debe pagarse por el uso o disfrute de un bien por alguien diferente a su dueño o como el costo de oportunidad que se asume cuando es el propietario quien lo utiliza, este costo ha de expresarse en la misma base monetaria o de cuenta en que se expresa el bien transado o utilizado como por ejemplo: onzas de oro, moneda colombiana ($), Unidad de Valor Real (UVR), dólar norteamericano (US$), etc.

FIGURA 1



El diagrama de la figura 1 muestra que se pide en préstamo P unidades de un bien (material, UVR, $, US$; etc.), con el compromiso de cancelar F unidades como pago único al final del período y por lo tanto el interés o costo que tiene esta transacción y de acuerdo con la definición de interés sería:

$$I = F - P$$

Ejemplo: asuma que la empresa A le concede en préstamo hoy a la empresa B, 700 kilos de cobre para ser cancelados con 900 kilos dentro de 6 meses, ¿Cuál es el costo o interés generado en esta negociación?

→ $P = 700$ kilos de bronce
$F = 900$ kilos de bronce

$I = F - P$
→ $I = 900 - 700 = 200$ kilos de bronce

Nótese que si la empresa A utiliza este material, en lugar de prestárselo a la empresa B, incurrirán en un costo de oportunidad representado en la pérdida de la posibilidad de incrementar su riqueza en 200 kilos de cobre para dentro de 6 meses y entonces esta decisión la tomaría A, lógicamente si su uso le generase una mayor utilidad que la que le ofrece la empresa B.

Si bien la cantidad de unidades adicionales que se reciben en una negociación es la razón de que se produzca la transacción, la forma de acordar este excedente no se da directamente en dichas unidades y por el contrario la práctica es estipular el adicional a cancelar como un porcentaje de lo transado[1].

Tasa de interés (i): Se refiere al interés (I) generado o acordado en una negociación pero definido como fracción de la cantidad transada y expresado en forma porcentual.

→ $i = (F - P) / P$
→ $i = F/P - 1$
→ $1 + i = F/P$ (**1**)
→ $F = P + P*i$ (**2**)

Ejemplo: ¿Cuál es la tasa de interés que se genera en la negociación del ejemplo anterior? o en otros términos, ¿Cuál es el costo que tiene para B y por ende el rendimiento logrado por A en la transacción?

→ $i = (F-P) / P$
→ $i = ((900-700) / 700) * 100\% = 28{,}57\%$ semestral (en cobre)

Nótese que al expresar el costo, éste debe clarificar no solo el lapso de tiempo para el cual se calcula el interés sino además la unidad monetaria o de cuenta en que se expresa, para el caso es el cobre, pues el hecho de pagar dicho costo en cobre no representa que sea idéntico al costo que se cancele en otra unidad diferente como por ejemplo, en moneda colombiana ($) a no ser que el precio del cobre en $ sea idéntico (situación poco probable) en ambas fechas tanto cuando se presta como cuando se devuelve el material, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

1 El porcentaje acordado (tasa de interés) en una negociación no es un valor cualquiera que se decida en ese momento y por el contrario existen tasas de referencia a nivel de tipo de negociación, país, temporalidad, nivel de riesgo, garantía sobre el resultado de la negociación, etc. que permiten determinar en una transacción el monto de esta tasa.

Ejemplo: ¿Cuál es la tasa de interés en la negociación del ejemplo anterior y expresada en $, si el precio del kilo de cobre al momento de la negociación y al momento de su cancelación es respectivamente: a) $ 1.200, $ 1.200; b) $ 1.200, $ 1.000 y c) $ 1.200 y $ 1.500.

Solución:

a) P = 700 kilos * $ 1.200/ kilo = $ 840.000
F = 900 kilos * $ 1.200/ kilo = $ 1.080.000
→ i = ((1.080.000 – 840.000) / 840.000) * 100% = 28.57% semestral (en $)

b) P = 700 kilos * $ 1.200/ kilo = $ 840.000
F = 900 kilos * $ 1.000/ kilo = $ 900.000
→ i = ((900.000 – 840.000) / 840.000) * 100% = 7.14% semestral (en $)

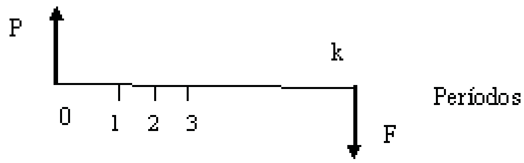
c) P = 700 kilos * $ 1.200/ kilo = $ 840.000
F = 900 kilos * $ 1.500/ kilo = $ 1.350.000
→ i = ((1.350.000 – 840.000) / 840.000) * 100% = 60.71% semestral (en $)

Hasta ahora se ha considerado conocido el valor transado P, el valor a cancelar F y se calcula la tasa de interés generada durante todo el lapso de tiempo que dura la negociación, esto es, se calcula la tasa de interés con una periodicidad idéntica al plazo estipulado, pero ¿qué sucede si en la negociación, se pacta además del monto negociado inicialmente, una tasa de interés cuyo período de causación es inferior al plazo pactado para su cancelación?; se desea calcular el valor a pagar al final (F), dado que se conoce los valores de P, i y el número de períodos de i que se pactan para el pago de la obligación; en otras palabras, obtener la relación matemática entre P, F, i y K donde K es el plazo concedido expresado en unidades de tiempo coincidentes con la unidad de tiempo en que se expresa el período de la tasa.

Para determinar la relación matemática entre estas variables, es necesario definir el concepto de tasa de interés simple y de tasa de interés compuesta.

Tasa de interés simple: Cuando el préstamo del bien se transa para ser cancelado en un solo contado al cabo de un lapso de tiempo mayor al período de causación de la tasa negociada, los intereses generados en cada período si bien incrementan el saldo de la deuda no son motivo de nuevos intereses para los períodos siguientes y por el contrario estos se calcularan siempre sobre el monto inicial o préstamo.

FIGURA 2



Si en la figura **2**, la tasa negociada por período es **i**, y designamos como $\mathbf{S_j}$ el valor acumulado de deuda al cabo de **j** períodos, tenemos:

→ $S_0 = P$ y según la ecuación **2;**
$S_1 = P + P*i = P(1 + i)$;
$S_2 = P(1 + i) + P*i$

$S_2 = P(1 + 2*i)$;
$S_3 = P(1 + 2*i) + P*I = P(1 + 3*i)$,

si designamos $S_{k}= F$ obtenemos por inducción matemática:

$F = P(1 + k*i)$ (3)

Ejemplo: Albano recibe hoy un crédito por $ 3.000.000 el cual debe cancelar en un solo contado dentro de 8 meses, si la tasa de interés pactada es del 3% mensual simple[2] , ¿Cuál es el monto que debe cancelar Albano dentro de 8 meses?

Solución:

P = $ 3.000.000;
i = 3% mensual simple;
k = 8 meses;
F = ?

De **(3):** $F = P(1+ k*i)$ y reemplazando valores,

F = 3.000.000(1 + 8*3%) = 3.000.000*1.24 = **$ 3.720.000**

Si bien la tasa de interés simple es utilizada en casos particulares de pequeños créditos comerciales y en algunos préstamos extrabancarios de dinero, en las transacciones comerciales normales así como en los créditos otorgados, en los dineros captados por entidades financieras y por ende en la evaluación de inversiones se utiliza la tasa de interés compuesta, la cual se define como sigue:

Tasa de interés compuesta: Cuando el préstamo del bien se transa para ser cancelado en un solo contado al cabo de un lapso de tiempo diferente al período de causación de

---

2 Para entender que la tasa a la cual se hace referencia es simple, es indispensable colocar después del valor de la tasa y de su periodicidad, el término complementario "**simple".**

3 En sentido estricto, legalmente los intereses no se pueden dejar acumular para sobre ellos cobrar intereses pues esto se considera delito "anatosismo" lo cual puede generar cárcel así como el cierre de la entidad que incurra en esta práctica, más sin embargo, esta situación se evita al no dejar acumular intereses y exigirse el pago en el momento de su causación o negociarse una tasa equivalente (concepto que se abordará más adelante) de mayor periodicidad, practicas que generan idéntico resultado matemático que si se dejaran acumular los intereses y por tanto producen para la entidad prestamista el mismo efecto pues al recibir periódicamente estos réditos pueden ser nuevamente colocados en préstamos que producen en –teoría- idéntico incremento en capital que si se dejaran acumular durante varios períodos de capitalización.

la tasa negociada, los intereses generados en cada período además de incrementar el saldo de la deuda, se "capitalizan"; esto es, los intereses de los períodos siguientes se calculan aplicando la tasa no al saldo inicial o monto del crédito -como se aplica cuando la tasa es simple- sino al saldo del período en consideración[3] y por esta forma de su aplicación también se le denomina "tasa de interés capitalizable" y al período de causación de la tasa se le denomina "período de capitalización".

Retomando el diagrama de la figura 2 y asumiendo que la tasa negociada es interés compuesto:

→ $S_0 = P$;
$S_1 = P + P*i = P\ (1+ i\ )$;
$S_2 = P\ (1 + i) + P\ (1+ i)*i = P\ (1 + i)^2$;
$S_3 = P\ (1 + i)^2 + P\ (1+ i)^2*i = P\ (1 + i)^2\ (1+i) = P\ (1+i)^3$;
Si designamos $S_k = F$ por inducción matemática:

F = P (1 + i)k (4)

Ejemplo: Asuma que en el ejemplo anterior, la negociación fue con tasa compuesta, calcular el valor a cancelar al cabo de los 8 meses de plazo concedidos en la negociación.

Solución:
P = $ 3.000.000;
i = 3% mensual[4] ;
K = 8 meses;
F = ?
De **(4):** F = P (1 + i)k
y reemplazando valores,
F = 3.000.000 (1 + 3%)8 **= $ 3.800.310**

Se puede notar como por obvias razones, el valor a cancelar es mayor al negociar tasa de interés compuesta ($ 3.800.310), que al negociar tasa de interés simple ($ 3.720.000).

Ahora bien, si se retoman los mismos datos del ejercicio pero se redefine el plazo de 8 meses como "un" período de 8 meses, se puede calcular el valor de la tasa cuyo período de capitalización sea de "8 meses" y genere el mismo resultado anterior.

Según la ecuación **(1)**:
1 + i = F/P
→ i = 3.800.310 / 3.000.000 – 1
→ **i = 26.68% en 8 meses**

Por lo que se puede concluir que es indiferente (arroja el mismo resultado) en esta negociación acordar entre las partes una tasa del 3% mensual o una tasa del 26.68% en 8

4 Cuando la tasa negociada es compuesta (capitalizable), para identificarla como tal es solo necesario colocar además del valor de la tasa, su periodicidad, y se sobreentiende que es una tasa compuesta; ahora bien, si se prefiere, además de la periodicidad se le puede agregar el término "compuesta".

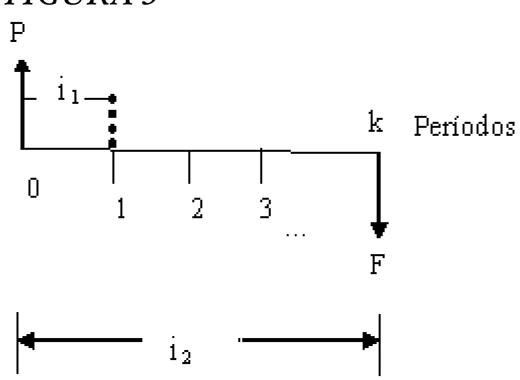
meses, lo que da pie a definir el concepto de tasas equivalentes.

EQUIVALENCIAS ECONÓMICAS

Dado que las tasas de interés miden la velocidad de cambio en el capital, la variable tiempo juega un papel preponderante en este concepto y obliga a medir las tasas como una función de ésta. Se requiere poseer una formulación matemática que compare tasas medidas en diferentes periodicidades, lo cual se conoce como "tasas equivalentes".

Tasas equivalentes: Son tasas i_1, i_2, i_3 … i_n de diferentes períodos de capitalización tales que generan el mismo resultado **F** cuando se aplican al mismo monto **P** y durante idéntico lapso de tiempo.

FIGURA 3



Si como muestra la figura 3, se asume que la tasa negociada es i_1 por cada uno de los **K** períodos y se desea calcular el valor de la tasa i_2 con período de capitalización **K** y que sea equivalente a i_1 se obtiene:

De **(4)**: $F = P\,(1 + i_1)^k$ (5)
y por equivalencia: $F = P\,(1 + i_2)$ **(6)**

Igualando **(5)** y **(6)**
$P\,(1 + i_2) = P\,(1 + i_1)^k$
$\therefore\ 1 + i_2 = (1 + i_1)^k$ **(7)**

Si en la igualdad anterior se divide el tiempo en subperíodos, (períodos de tiempo iguales o más cortos que el período de capitalización de la tasa i_1), se puede entonces expresar los períodos de ambas tasas en función de los subperíodos como sigue:

El período de capitalización de la tasa i_1 = m subperíodos
El período de capitalización de la tasa i_2 = n subperíodos

$\rightarrow k * m = n \quad \therefore\ k = n / m$

Y la ecuación (7) se transforma en:
$1 + i_2 = (1 + i_1)^{n/m}$ **(8)**

Ejemplo: En el ejemplo del crédito concedido a Albano, calcule la tasa de período de capitalización cada 8 meses, equivalente a la tasa negociada del 3% mensual, utilizando a) la ecuación (4) y luego b) la ecuación (8).

Solución:
a) P = $ 3.000.000;
F = $ 3.800.310;
k = un período de 8 meses

$$\text{De } \mathbf{(4)}: F = P(1+i)^k \quad \Rightarrow \quad i = \left[\frac{F}{P} - 1\right] * 100\% \Rightarrow i = \left[\frac{3.800.310}{3.000.000} - 1\right] * 100\%$$

$$\therefore i = 26.68\% \text{ en 8 meses}$$

1. En este caso y por sencillez el período de referencia (subperíodo), lo igualamos a 1 mes:

→ $m = 1$ y $n = 8$
$\therefore\ k = 8/1 = 8$
y reemplazando en **(8)**:

$i_2 = (1 + 0.03)^8 = 0.2668$
$= 26.68\%$ en 8 meses

Ejemplo: Calcular la tasa con período de capitalización 83 días equivalente a la tasa 65.23% con período de capitalización 2 años y 21 días.

Solución:

Utilizando la ecuación **(4)** y asumiendo un crédito por \$ 100.000 el cual debe cancelarse en un solo contado dentro de 2 años y 21 días, se calcula el valor a pagar:

→ F = 100.000*(1 + 0.6523)
= \$ 165.230

Se trata entonces de calcular la tasa con periodicidad de 83 días que convierte \$ 100.000 en \$ 165.230 en 2 años y 21 días y si se convierte este tiempo en días (asumimos año de 365 días):

→ 2 años y 21 días = 365*2 + 21
= 751 días,

Por lo que k en la ecuación **(4)** sería: k = 751/83 (cantidad de períodos de 83 días)

Entonces, por la ecuación (4):

$$i = \left[\sqrt[k]{\frac{F}{P}} - 1\right] * 100\%;$$

$$i = \left[\sqrt[\frac{751}{83}]{\frac{165.230}{100.000}} - 1\right] * 100\%$$

= 5.7068% en 83 días;

O también si se utiliza la ecuación **(8)**, tomando como subperíodo el día:

$$\Rightarrow \quad i_2 = (1 + 0.6523)^{\frac{83}{751}} - 1$$

= 0.057068 = 5.7068% en 83 días

En los ejemplos anteriores y según la definición de tasas equivalentes, se ha considerado solo el caso en el cual un valor P se cancela con un único pago F, pero lo normal es que se realicen varios pagos durante el tiempo estipulado como plazo concedido en la negociación, se puede demostrar que también en este caso aplica el concepto de tasas equivalentes. Lo anterior se comprueba con el siguiente ejemplo:

Ejemplo: Antonio recibió hoy de su banco un crédito por $ 5.000.000 y con un plazo para su cancelación de 30 meses a una tasa del 24% EA; calcular el valor de las cuotas a cancelar si la forma de pago convenida fue:

a) Cuotas fijas mensuales.
b) Cuotas fijas trimestrales.
c) Cuotas crecientes en $ 200.000 y con periodicidad semestral.
d) Un solo pago al final del plazo concedido.

Demostrar que desde el punto de vista económico cualquier forma de pago genera el mismo valor futuro único F y que por lo tanto también aplica el concepto de tasas equivalentes cuando se pagan varias cuotas (en lugar de solo una) para la cancelación del crédito.

Solución: En este caso y para poder calcular las cuotas en cada una de las formas de pago convenidas, es indispensable obtener las tasas equivalentes al 24% EA y con períodos de capitalización mensual, trimestral y semestral.

Utilizando la relación de equivalencia:

$$1 + i_2 = (1 + i_1)^{n/m},$$

se obtiene que las tasas a utilizar son:

$$i_{mes} = [(1+0,24)^{1/12} - 1] * 100\,\% = 1,8088\,\%\ \text{EMV}$$

$$i_{trimestral} = [(1+0,24)^{1/4} - 1] * 100\,\% = 5,525\,\%\ \text{ETV}$$

$$i_{semestral} = [(1+0,24)^{1/2} - 1] * 100\,\% = 11,3553\,\%\ \text{ESV}$$

Aplicando estas tasas en las relaciones:

$$A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

convierte un valor actual P en una serie de pagos uniformes de valor igual a A cada uno.

$$A_1 = P - \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n i} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

Calcula el valor de la primera cuota en una serie de pagos que crecen en forma aritmética.

Con las tasas equivalentes calculadas en el proceso anterior y utilizando las relaciones de equivalencia correspondientes a series de cuota fija y series con cuotas crecientes aritméticamente, se llega a los siguientes resultados:

a) Valor de las Cuotas Fijas Mensuales

$$= 5'000.000\left[\frac{(0,018088)(1,8088)^{30}}{1,018088^{30} - 1}\right]$$

$$= \$217.423$$

b)Valor de las Cuotas Fijas Trimestrales

$$= 5'000.000\left[\frac{(0,05525)(1,05525)^{10}}{1,05525^{10} - 1}\right]$$

$$= \boxed{\$664.135}$$

c) Valor de la primera Cuota de esta serie de pagos:

$$=5´000.000-\left[\frac{(20000)}{0{,}113553}\right]$$

$$\left[\frac{(1{,}113553)^5}{0{,}113553(1{,}113553\ )^5}-\frac{5}{(1{,}113553)^5}\right]$$

$$\left[\frac{(0{,}113553(1{,}113553)^5}{(1{,}113553^5)-1}\right]=\boxed{\$1´007.772}$$

d) Valor del Pago Único Final

$= 5´000.000\ (1{,}018088)^{30}$

$= \$8´560.994$

Se demuestra que la equivalencia entre tasas también se aplica para los pagos por cuotas, calculando el valor equivalente del pago único final a cada uno de los casos a), b) y c), el cual debe ser igual a $8´560.994

a) Valor Pago Único Final Equivalente

$$=\ \$217.423\left[\frac{(1{,}018088)^{30}-1}{0{,}018088}\right]$$

$$=\boxed{\$8.561.090}$$

b) Valor Pago Único Final Equivalente

$$=\$664.135\left[\frac{(1{,}05525)^{10}-1}{1{,}05525}\right]$$

$$=\boxed{\$8.560.989}$$

c) Valor Pago Único Final Equivalente:

$$=1´007.772*\left[\frac{(1{,}113553)^5-1}{0{,}113553}\right]$$

$$+\left[\frac{(20000)}{0{,}113553}\right]\left[\frac{(1{,}113553)^5-1}{0{,}113553}-5\right]$$

$$=\boxed{\$8.560.999}$$

Nota: Las pequeñas diferencias entre el valor $8´560.994 y las cifras logradas son debidas a la aproximación de 4 decimales con que se trabajaron las tasas.

En algunos casos se requiere calcular la tasa que se negocia en una transacción en la cual un valor único P se convierte en un valor final único F pero con la característica que la tasa requerida es de un período de capitalización diferente al lapso de tiempo que transcurre entre P y F y si bien esto se puede lograr calculando inicialmente la tasa con periodicidad igual al plazo pactado en la negociación, y luego encontrando la equivalencia requerida, también se puede lograr directamente como se demuestra a continuación.

Según la ecuación **(1)**:

$$1+i=\left[\frac{F}{P}\right]$$

y la ecuación **(8):**

$$1+i_2=(1+i_1)^{n/m}$$

y si en **(1)** llamamos:

$$i_1 \text{ a } i \ \Rightarrow\ 1+i_1=\left[\frac{F}{P}\right] \quad \textbf{(9)}$$

y reemplazando **(9)** en **(8)**

$$\Rightarrow\ 1+i_2=\left[\frac{F}{P}\right]^{n/m}$$

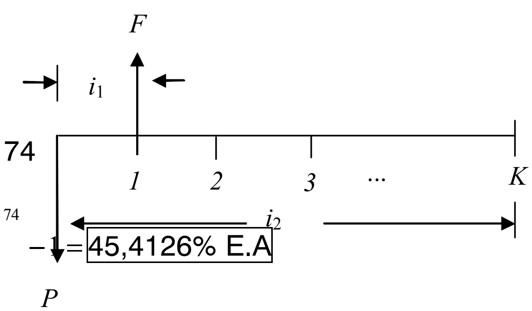
o simplemente: $1+i=\left[\frac{F}{P}\right]^{n/m}$ **(10)**

donde:

i = Tasa con la periodicidad que queremos calcular.
n = Período de la tasa a calcular expresada en períodos de referencia.

m=Lapso de tiempo que transcurre entre P y F expresado en períodos de referencia.

La FIGURA 4, muestra las variables utilizadas.



$\Rightarrow$ n= 360 y m= 74

$i=\left[\frac{1'620.000}{1'500.000}\right]^{360/74}-1=\boxed{45{,}4126\%\ \text{E.A}}$

Ejemplo: Utilizar la fórmula **(10)** para calcular la tasa de interés E.A que se negoció en un crédito por \$1.500.000 los cuales deben cancelarse con \$1´620.000 a los 2 meses y 14 días.

Solución: Si se asume que el mes comercial es de 30 días, el plazo estipulado es:
2 * 30 + 14 = 74 días y si se toma como período de referencia , un día:

CAMBIOS EN LOS PRECIOS DE LAS MONEDAS FORÁNEAS

El modelo está diseñado para involucrar inversiones en diferentes monedas, por tanto el fenómeno de tasa de cambio (propio del mercado de divisas) debe ser considerado.

Tasa de Devaluación (i_d): Cuando en un momento t se dan F unidades de la moneda A por cada unidad de la moneda B (tipo de cambio en el momento **t**) y este valor es superior al valor P unidades que se daban de A por la unidad B en el momento t-1,(tipo de cambio en el momento **t-1**) se dice que la moneda A se devaluó frente a la moneda B en el período **t** y a la diferencia de valor expresada porcentualmente como fracción de P se le denomina **Tasa de Devaluación**; en caso contrario, esto es, si F es menor que P se expresa que la moneda A se revaluó durante ese lapso de tiempo con respecto a la moneda B y en este caso la tasa de devaluación matemáticamente será un valor negativo.

$$\Rightarrow i_d=\left[\frac{F-P}{P}\right] \therefore\ i_d=\left[\frac{F}{P}\right]-1$$

$$\Rightarrow \quad 1+i_d=\left[\frac{F}{P}\right] \textbf{(11)}$$

Dado que la ecuación **(11)** es idéntica a la ecuación **(1)**, para cálculos de evaluación de inversiones, es normal utilizar a i_d como una tasa de interés.

Ahora bien, por regla de tres, si se dan P unidades de A por una unidad de B, por una unidad de A deben darse $\left[\frac{1}{P}\right]$ unidades de B; entonces si a los tipos de cambio expresados en unidades de B, los definimos como P´ y F´ respectivamente y adicionalmente a la tasa de devaluación de la moneda B respecto a la moneda A la llamamos $i'_{d,}$

Por **(11)** $1+i'_d = \left[\frac{F'}{P'}\right] \therefore 1+i'_d = \left[\frac{P}{F}\right]$ **(12)**

Y combinando **(11) y (12)** obtenemos:

$$1+i'_d = \left[\frac{1}{1+i_d}\right] \quad \textbf{(13)}$$

Ejemplo: Si durante el año 2007 se estima que la moneda colombiana ($) se devaluará en un 6,75% frente al •, ¿Cuál será la devaluación estimada del • frente al $?

Solución:
i_d = devaluación del $ frente al •
i'_d = devaluación del • frente al $

Por (13)

$$1+i'_d = \left[\frac{1}{1{,}0675}\right] \therefore i'_d = -6{,}32\%$$

De manera que se estimaría que el • se revaluaría en el 2007 el 6,32% frente al $.

MODELO PARA CALCULAR LA RENTABILIDAD DE UNA INVERSIÓN CUANDO PARTICIPAN DIFERENTES MEDIOS DE PAGO

Se pretende formular un modelo para calcular la rentabilidad en moneda nacional considerando el impacto de aspectos como la periodicidad de la tasa, el cambio en la cotización de los productos transables en los mercados internacionales y la tasa de cambio. Se reconoce que el efecto simultáneo de estas "velocidades de cambio" afecta el monto de la utilidad lograda en una inversión y puede ser expresada como una multiplicatoria de incrementos medidos en diferentes unidades monetarias.

Tasas Combinadas: Se refiere a la tasa que resulta en una negociación, donde se aplican varias tasas que pueden ser: a) Tasas Simultáneas y b) Tasas Diferenciales.

Tasas Simultáneas: Cuando interesa calcular la tasa generada periódicamente en una base de cuenta o monetaria diferente a la expresada explícitamente en la negociación, es porque en este caso y para el mismo período subsisten varis tasas a las cuales denominamos simultáneas. Ahora bien para calcular la tasa periódica en la base que nos interesa, analizamos el siguiente caso.

Ejemplo:
Suponga que la empresa X presta a la empresa Y, V_o Kilos de cobre, comprometiéndose Y a devolver a los n períodos V_f Kilos de este material, ¿cuál es la tasa periódica en $ que genera la transacción?

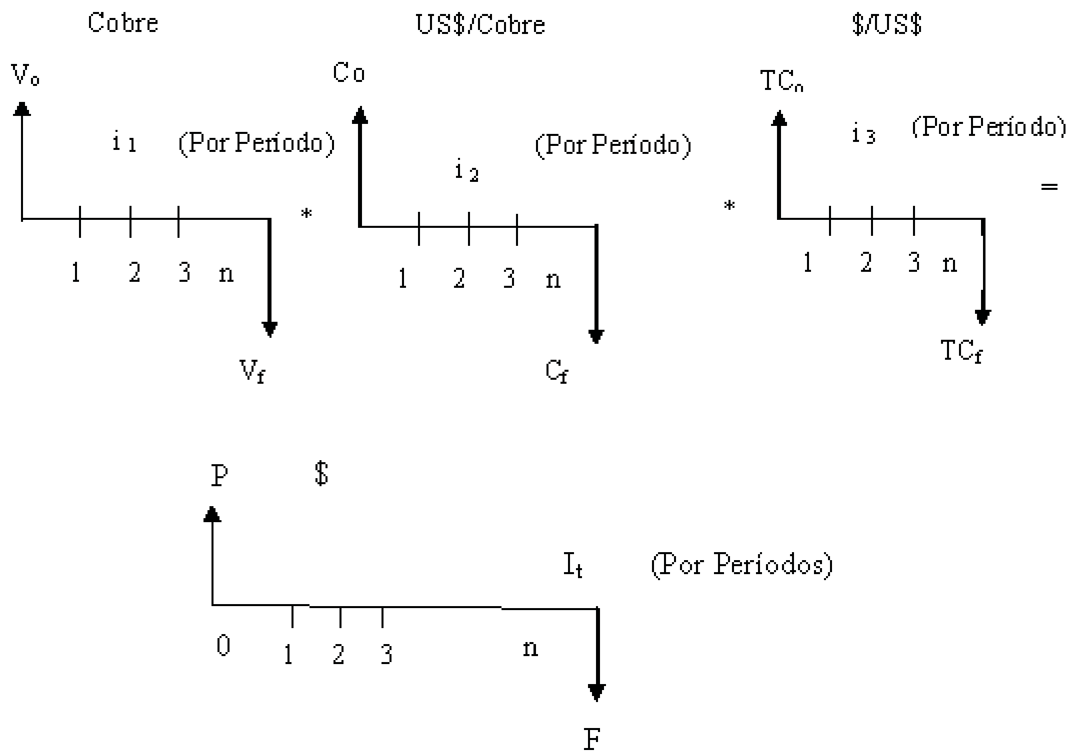
Solución: Dado que la cantidad de cobre a devolver a los n períodos es mayor a la inicialmente transada, existe una tasa i_1 que es el costo (%) por período causado por el uso del cobre y además expresada en las misma unidad de la negociación, en este caso en cobre.

Supóngase que en el momento inicial, el costo de un kilo de cobre es C_o y que a los n períodos este costo es $C_{f\,;}$ por tanto se genera una tasa i_2 que es el cambio porcentual promedio por período en el precio del producto y expresada en la base monetaria o de cuenta en que normalmente se negocia el cobre, supongamos que es en US$ y notemos como i_2 puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo de si el cobre es más costoso al final que al inicio de la transacción, o menos costoso o tiene un precio igual.

Adicionalmente, y dado que la intención es calcular la tasa periódica generada en $, se conoce un tipo de cambio ($ / US$) al inicio y que denominaremos TC_o y se pronostica un tipo de cambio a los n períodos que llamaremos TC_f, lo cual genera una tasa i_3 que no es más que la tasa de devaluación del $ frente al US$ promedio por período durante este lapso de tiempo, notemos que i_3 puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo si durante este tiempo el $ se devalúa, revalúa o permanece constante el tipo de cambio frente al US$.

Si adicionalmente se valora en $ la negociación y se define, P($) al valor total inicial del cobre negociado y F ($) al valor a los n períodos, esta negociación se puede representar con los siguientes diagramas de flujo de caja.

FIGURA 5



De la Figura 5, dado que i_1, i_2, i_3, e i_t son tasas compuestas, se logran las siguientes relaciones entre variables.

$V_f = V_o(1+i_1)n$ **(14)** $Cf=Co(1+i_2)n$ **(15)**

$TC_f = TC_o(1+i_3)n$ **(16)** y $F=P(1+i_t)n$ **(17)**

Además: $P = V_o * C_o * TC_o$ **(18)** y $F=V_f * C_f * TC_f$ **(19)**

Reemplazando **(18)** y **(19)** en **(17)**:

$V_f * C_f * TC_f = V_o * C_o * TC_o (1+i_t)n$ **(20)**

Y reemplazando **(14)**, **(15)** y **(16)** en (20):

$\cancel{Vo}(1+i_1)\cancel{n} \quad * \cancel{C_o}(1+i_2)\cancel{n} \quad * \cancel{TC_o}(1+i_3)n = \quad \cancel{V_o} * \cancel{C_o} * \cancel{TC_o}(1+i_t)n$

$\Rightarrow (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3) = (1+i_t)$

En forma general para K tasas simultáneas:

$i_t = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_k) - 1$ **(21)**

Para la aplicación de la ecuación **(21)** debemos tener en cuenta:

1. i_1 por razones obvias siempre será positiva.
2. $i_2, i_3 \ldots i_k$ pueden ser positivas, negativas o cero.
3. Los períodos de capitalización de $i_1, i_2, i_3 \ldots i_k$ deben ser idénticos.
4. El período de capitalización de i_t es idéntico a al de las tasas $i_1, i_2, i_3 \ldots i_k$.

⇒ 5. Las unidades monetaria o de cuenta de las tasas $i_1, i_2, i_3 \ldots i_k$, deben ser tales que la unidad en la que quede expresada i_t sea la que se busca; en nuestro ejemplo:

i_1(cobre); i_2 (US$/Cobre); i3($/US$)
i_t($)

Para concluir, se expone a continuación un ejemplo que trata de recoger los conceptos expuestos y cómo podemos aprovechar las diferentes fórmulas para resolver de forma rápida una situación donde se requieran cálculos que consideren el valor del dinero en el tiempo, es decir, donde intervenga el concepto de tasa de interés.

Se negocian 1.200 kilos de material para cancelarlos con 1.300 kilos a los 8 meses; en el momento inicial de la negociación el kilo del material tiene un precio de •25.32, tipo de cambio es de •0,95/US$ y TRM igual a $ 2875,23

Se dispone de los siguientes pronósticos:

• 0,947/US$ al año de la negociación (asuma crecimiento geométrico).

Devaluación del $ frente al US$: 8,75% (crecimiento geométrico).

Calcular el costo o rendimiento de esta negociación, con periodicidad anual y expresado en moneda colombiana.

Utilice tres métodos:

1. Conversión a $ del valor inicial y final negociado.
2. Calculando la tasa combinada en base a las tasas expresadas en: producto, precio y devaluaciones.
3. Utilizando todos los atajos posibles y que reduzcan al máximo el proceso de solución.

Nota: Se espera que el precio del producto en • se incremente en forma geométrica en 1,43% trimestralmente.

SOLUCIÓN.

Método 1:

Valor inicial en

* $2875,23/US$ = $91´958.935

Precio del Kilo a los 8 meses= •25,32(1,0143)8/3=•26,2971/kilo.

⇒ •0,947/US$
= •0,95/US$(1+$i_d$)12/8
i_d(•/US$)= -0,2106% en 8 meses.

Tipo de cambio (•/US$) a los 8 meses = •0,95/US$(1- 0,002106)= •0,948/US$

Tipo de cambio ($/US$) a los 8 meses=$2875,23/US$(1,0875)8/12 =$3.040,5963/US$

Valor final en $=

* $3040,5963/US$= $109´648.233

$109´648.233 = $91´958.935 (1+i)8/12 $i_{\$}$= 30,2% E.A (en $)

Método 2:

- Tasa de Interés cobrada en producto:

$ 1300 Kilos=1200 Kilos (1+i_1)
$i_{1=}$ 8,3333% en el período de 8 meses y expresada en producto.

- Incremento en el precio del producto (•/kilo) en el transcurso de los 8 meses:
$i_{2=}$ [(1,0143)8/3 -1] * 100%
∴ $i_{2=}$3,8589% en el período de 8 meses y expresada en • / kilo de producto.

-Devaluación estimada del US$ frente al • en el período de 8 meses:

∴ i_3= 0,211% en el período de 8 meses y expresada en US$/•

-Devaluación estimada del $ frente al US$ en el período de 8 meses:

I_4= [(1,0875)8/12- 1] * 100%
= 5,7514% en el período de 8 meses y expresada en $/US$.

Y utilizando el concepto de tasa combinada:

$I_{\$}$=[(1+$i_1$) (1+$i_2$) (1+$i_3$) (1+$i_4$)-1] * 100%
Prod •/Prod U$$/• $/US$

$I_{\$}$ (en 8 meses) =[(1,083333)(1,038589) (1,00211) (1,057514) - 1] * 100%

$I_{\$}$ = 19,2359 x% en un período de 8 meses.
$I_{\$}$ = [(1,192359)12/8 – 1] * 100%= 30,2 % E.A en $.

Método 3:
En este caso se utilizan directamente las relaciones desarrolladas anteriormente.

$$I_{\$}=[(1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)(1+i_4)-1] * 100\%$$

$$\therefore\ i_{\$}=\left(\left[\frac{F}{P}\right]^{n/m}(1+i_1)^k\left[\frac{P}{F}\right](1+i)-1\right) * 100\%$$

Prod €/Prod U$$/€ $/US$

y reemplazando:

$$i_{\$}=\left(\left[\frac{1300}{1200}\right]^{12/8}(1{,}0143)^4\left[\frac{0{,}95}{0{,}947}\right](1{,}0875)-1\right) * 100\%$$

= 30,2% E.A en $

Y se nota como al aplicar éstos conceptos se puede resolver de una manera ágil y sencilla en las cuales intervienen diferentes y variadas tasas de intereses.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

En inversiones realizadas en medios de pago o unidad de cuenta diferentes a la unidad en la cual se desea calcular la rentabilidad, el incremento en la riqueza lograda al concluir la negociación se calcula como el producto de los incrementos logrados en cada uno de los medios de pago que intervienen en la operación, debido al efecto de cascada o reacción en cadena que se produce por los cambios controlables e incontrolables existentes en los mercados de valores o de dinero.

Al aplicar los conceptos y fórmulas analizadas en el presente documento se logra de manera ágil y sencilla resolver situaciones en las cuales es importante el concepto de valor del dinero en el tiempo, aún si en la negociación intervienen diferentes unidades monetarias o de cuenta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS

CANADA, Jhon R, SULLIVAN William y WHITE Jho A. Análisis de la inversión de capital para ingeniería y administración. Prentice Hall. Segunda edición. México, 1.997. 566 p.

CORREDORES ASOCIADOS. Manual para el cálculo de rentabilidades. Séptima edición. Santa Fe de Bogotá, 1.998. 208 p.

GARCÍA, Jaime A. Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita. Pearson. Cuarta edición. Santa Fe de Bogotá DC, 2.000. 299 p.

HULL, Jhon C. Introducción a los mercados de futuros y opciones. Pearson Prentice Hall. Cuarta edición. Madrid, 2.002. 560 p.

KOSI KOWSKI, Zbigniew. Finanzas internacionales. Mc Graw Hill. México, 2.000. 368 p.

LONDOÑO OROZCO, Carlos Arturo. Fundamentos de ingeniería económica. UCPR. Primera edición. Pereira, 2.004. 480 p.

ROSS, Stephen A, WESTERFIELLD Randolph W y JAFFE Jeffrey. Finanzas corporativas. Mc Graw Hill. Quinta edición. México, 2.000. 1049 p.

TAYLOR, George A. Ingeniería económica. Limusa. Cuarta reimpresión. México, 1.974. 556 p.

VARELA VILLEGAS, Rodrigo. Evaluación económica de proyectos de inversión. Grupo editorial Iberoamérica. Sexta edición. Sant