Enseñanza del algebra escolar desde la solución de problemas

Guillermo Giraldo B.
ggbaries@hotmail.com
Licenciado en Matemática y física
Estudiante Maestría en Enseñanza de la Matemática
Universidad Tecnológica de Pereira
Presidente del Colegio de Profesores de Matemática.

Resumen

Ante la situación actual de la enseñanza del álgebra y para responder al desarrollo de competencias interpretativas, propositivas y argumentativas; se hace necesario enfocar en el álgebra de octavo y noveno en forma rápida, desde el comienzo del año la solución de problemas que requieran modelación algebraica, de tal manera que surja la necesidad del análisis y el razonamiento para descubrir la aplicación de los instrumentos algebraicos que se utilizan para la resolución de un problema.

Fundamentalmente se presentarán estrategias en grado noveno, las cuáles parten de diagnosticar el manejo que traen los estudiantes de los números enteros y racionales tanto positivos como negativos. También la necesidad de ver los arreglos por filas y columnas debe vivenciarse desde el comienzo del año con la organización dentro del aula de clase, de tal manera que los estudiantes vivencien el sentido de la posición, de acuerdo con una ubicación por filas y columnas y siempre tengan presente el lugar donde se encuentran.

Como se puede partir de un problema que requiera solución en un sistema de ecuaciones de 2x2, y mirar en este mismo problema la solución gráfica relacionando directamente con la función lineal.

La necesidad desde un comienzo de organizar las ecuaciones en un sistema de filas y columnas para facilitar la solución por eliminación, sustitución, igualación, determinantes incluyendo además la matriz ampliada.

Asimismo mirar el caso con los sistemas de 3x3 a partir de problemas que requieran esta estrategia.

Observar como introducir la parte algorítmica vinculada a la solución de problemas y como plantear ejercitaciones para mecanizar ciertos procedimientos como parte complementaria al trabajo de solución y modelación con herramientas algebraicas.

Se plantearán también elementos sobre como introducirnos en la investigación pedagógica dentro del aula, utilizando cuaderno de apuntes para convertirlo en diario de campo, aprovechando como insumo las producciones de los estudiantes en las cuáles se pueden observar tendencias en el manejo de diferentes situaciones matemáticas las cuáles pueden ser utilizadas para reflexionar y generar alternativas que permitan resignificar nuestras prácticas docentes.

El algebra escolar desde la solución de problemas.

El álgebra escolar actualmente sigue generando una actitud de apatía, desgano y falta de compromiso para los estudiantes de octavo y noveno quienes ven en ella algo demasiado abstracto y fuera de contexto de aplicabilidad inmediata. Precisamente los resultados obtenidos en las evaluaciones son desalentadoras, ya que cada grupo de 40 estudiantes se puede decir que cinco se aproximan a una comprensión aceptable de la misma, tomando en cuenta que la memorización de ciertos algoritmos y reglas no garantizan el aprendizaje del álgebra, ya que al utilizar estos aprendizajes en resolución de problemas no se obtienen buenos resultados.

Además nos encontramos con situaciones que acaban de dificultar la enseñanza del álgebra como son:

- Dudas sobre la estructura de los números naturales y sus operaciones.
- Dificultad al operar con números enteros (positivos y negativos).
- Olvido casi total del manejo de los números racionales con sus operaciones, y quienes recuerdan algo, algunos lo hacen utilizando reglas como de multiplicar en X, numeradores y denominadores.
- El manejo de interpretación y resolución de problemas es escaso, aún utilizando solo lenguaje ordinario como se hacía antes de Diofanto (250 a.C), en la etapa retórica, y por lo tanto, menos aún, modelando con símbolos (Etapa simbólica).

Los temas típicos que se han incluido son:

- Propiedades de los números reales y complejos.
- El planteamiento y resolución de ecuaciones de primero y segundo grado con una incógnita.
- La simplificación de expresiones polinómicas y racionales.
- La representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas.
- Sucesiones y series

Es necesario considerar que el contenido del álgebra escolar no ha cambiado mucho, ya que al comienzo de este siglo los cursos iniciales de álgebra cubrían temas tales como:

- Simplificación de expresiones.
- Planteo y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas.
- Uso de técnicas para hallar respuesta a problemas.
- Práctica con razones, proporciones, potencias y raíces.

Nuestros actuales estándares nos piden:

1. Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
2. Construir expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.
3. Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para verificar conjeturas.
4. Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
5. Identificar diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
6. Analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.
7. Interpretar los diferentes significados de la pendiente en situaciones de variación.
8. Interpretar la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.
9. Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.

Por lo tanto lo que debemos considerar no tanto el cambio de contenidos, sino la pedagogía para lograr hacer efectivos los procesos de enseñabilidad y educabilidad propios de esta área y también saber distribuir el tiempo de tal manera que se alcance a trabajar lo fundamental para cumplir estos estándares.

Experiencias de enseñabilidad y educabilidad

Previamente tomemos en cuenta unas consideraciones psicológicas como lo refiere Sfard (1991) quien ha sugerido que las nociones matemáticas abstractas pueden concebirse en dos formas fundamentalmente diferentes: estructuralmente (como objetos) y operacionalmente (como procesos). Asegura que para la mayoría de las personas la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de nuevos conocimientos matemáticos. La transición desde una concepción de “proceso” hacia una concepción de “objeto” no se logra ni rápidamente ni sin esfuerzo. Una vez que ambas concepciones se han desarrollado, ellas juegan papeles muy importantes en la actividad matemática ulterior.

Existe una honda brecha ontológica entre las concepciones operacional y estructural. Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirse a ella como si fuese algo real, una estructura estática que existe en algún tiempo y lugar. También significa ser capaz de reconocer la idea a primera vista y de manipularla como un todo sin requerir detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica verla como una entidad potencial más que como una entidad real, que tiene existencia por ser consecuencia de una serie de acciones. Así, mientras que la concepción estructural es estática, instantánea e integradora, una concepción operacional es dinámica, secuencial y detallada.

Las demandas cognitivas que se imponen a los estudiantes de álgebra incluyen:

- El tratamiento de representaciones simbólicas que tienen muy poco o ningún contenido semántico como objetos matemáticos y la operación sobre estos objetos con procesos que usualmente no arrojan resultados numéricos.
- La modificación de sus interpretaciones iniciales de ciertos símbolos.
- La inducción a representar las relaciones de situaciones enunciadas en palabras con operaciones que frecuentemente son las inversas a las que ellos usaban casi automáticamente, para resolver problemas similares en la aritmética.

Transcurrieron siglos en el campo del álgebra para que estos desarrollos se produjeran. No obstante se espera que los estudiantes que comienzan su primer curso de álgebra los realicen casi inmediatamente. Tomemos en nuestro contexto escolar algunas experiencias obtenidas con estudiantes de octavo y noveno grado del Gimnasio Risaralda.

Como punto de partida se realizó una dinámica de organización que sirvió como diagnóstico para detectar el manejo de coordenadas, parejas ordenadas, y también empezar a enfatizar sobre el manejo de filas y columnas.

Se pide a los estudiantes que organicen sus puestos por filas y columnas, y de acuerdo con los puntos cardinales (Oriente, occidente, norte y sur), ubiquen su posición tomando un referente acorde con la posición, que tenga el grupo según el aula para determinar cuál es la primera fila, la segunda, etc, asimismo cuál es la primera columna, segunda, y con esta referencia preguntar al estudiante su posición al llamar a lista (Santiago Acevedo (3,1) ; Maritza Rios (4,2), etc..) Se procura no descuidar esta dinámica en el transcurso del año, esto le da el sentido matemático y la importancia que tienen los arreglos matriciales en la vida diaria para la organización, enfatizando que posteriormente notarán la importancia de asimilar estos ordenamientos (solución de sistemas de ecuaciones).

También como curiosidad se utilizan cuadrados mágicos que se mencionan en lecturas que hacemos del libro El Hombre que Calculaba, llevándolos a mirar claves de cuadrados mágicos de 3x3.

10	3	8
5	7	9
6	11	4

21

13	6	11
8	10	12
9	14	7

30

11	4	9
6	8	10
7	12	5

24

Observado el mecanismo de este proceso se invita a los estudiantes a realizarlos con números negativos y observar que cumplen las condiciones:

-8	-1	-6
-3	-5	-7
-4	-9	-2

6	-1	4
1	3	5
2	7	0

0	-7	-2
-5	-3	-1
-4	1	-6

Visualizar la importancia del orden ascendente para que cumpla las condiciones el cuadrado mágico y repasar de manera interesante la adición de números enteros.

Lograr para introducir términos semejantes utilizando el cuadrado mágico así:

10x	3x	8x
5x	7x	9x
6x	11x	4x

21x

9z	2x	7y
4m	6y	8z
5m	10z	3x

18 ¿Este porqué no cumple?

Esta experiencia generó expectativas y despertó interés en los estudiantes de octavo permitiendo introducirse al álgebra de una manera atractiva y los de noveno hicieron un repaso diagnóstico.

Otra experiencia consiste en plantear un problema y a partir de él generar una serie de inquietudes para resolverlo.

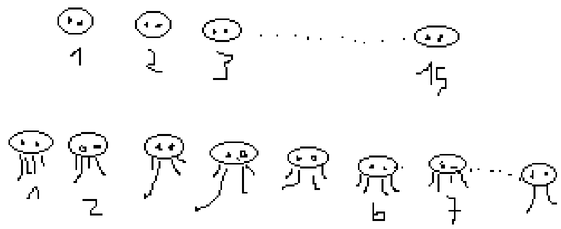
Por ejemplo; En la Granja de Noé observamos mezclados en un lugar conejos y gallinas, un estudiante observador al salir nos planteó, en el lugar donde estaban los conejos y las gallinas conté 30 ojos y 44 patas. ¿Decir el número de conejos y el número de gallinas?

Se estimula la dinámica para resolver el problema aclarando que no teman dar soluciones aunque no sean acertadas. Inicialmente resultan respuestas como:

15 conejos y 15 gallinas. Se le pide que haga la cuenta y descubra el error, los demás hacen la observación: cada animal tiene dos ojos.
Se empiezan a hacer inferencias, recordando que los conejos tienen 4 patas y las gallinas 2.

Así van resultando respuestas más acertadas.

De pronto alguien recurre a sus conocimientos elementales y dibuja.



Pinta los ojos hasta completar 30, luego pinta de a 2 patas hasta completar 30 y observa que le sobran 14, se las coloca de a 2 nuevamente hasta que cubre 7 animales.
Así descubre que hay 7 conejos y 8 gallinas

El estudiante encuentra una solución, sin embargo se aclara que este proceso se observa bien en estudiantes de primaria, como estudiantes de octavo grado necesitamos hacer algo mas elegante, así llegamos a modelar una ecuación interpretando el problema:

Al tener 30 ojos en total son 15 animales, así si las gallinas son X los conejos serán 15 – X. Modelando la ecuación tenemos y resulta:

2X + 2 (15-X) = 30 , despejando 2X – 2X = 30 – 30, ecuación que no conduce a resultados, se descubre el motivo con los estudiantes: el número de ojos no hace diferencia entre los animales, por lo tanto se deben tener en cuenta las patas, probemos de nuevo modelar la ecuación con esta consideración:

2X + 4(15-X) = 44, despejando 2X + 60 – 4X = 44, 16 = 2X X = 8 Efectivamente tenemos 8 gallinas y 7 conejos.

En noveno grado se plantea modelar con dos variables este problema; Si X son las gallinas y los conejos, obtenemos el siguiente sistema:

Ecuación 1 2X + 2Y = 30
Ecuación 2 2X + 4Y = 44

A partir de las cuáles se aplicarán todos los métodos de solución conocidos (gráfico, eliminación, sustitución, igualación, sustitución, determinante de una matriz).

El método gráfico se debe aprovechar para caracterizar la función lineal, con sus propiedades básicas.

Además en el método de matrices se debe recordar aquello que se planteó al comienzo sobre las filas y las columnas, partiendo de la organización en el salón , y sin esperar a llegar a la universidad dar a conocer la matriz ampliada la cuál asimilarán los estudiantes sin dificultad:

$$\left|\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 30 \\ 2 & 4 & 44 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 30 \\ 0 & -2 & -14 \end{array}\right| \longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 16 \\ 0 & -2 & -14 \end{array}\right|$$

$$\longrightarrow \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right|$$

Multiplicar por – 2 la segunda fila y sumarla con la primera. Seguir este proceso de operaciones entre filas con adición y multiplicación hasta llegar a la matriz identidad y obtener la respuesta del problema.

Esta experiencia se convierte en algo significativo y útil para el aprendizaje del álgebra escolar, generando, por lo menos, un nuevo interés para la organización de procesos mentales que conduzcan al universo de la formalización.

BIBLIOGRAFIA

GARCÍA de GARCÍA, Leonor y Otros. *Serie Matemáticas para Educación Básica Secundaria y Media Vocacional*, Bogotá: Grupo Editorial Norma.

GIRALDO B., Guillermo. *Apuntes personales*.

SFARD, A. *On the dual nature of mathematical conceptions*. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics.