

DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL¹

José Gerardo Cardona Toro

Candidato a Doctor en Estadística
Maestría en Investigación de Operaciones y Estadísticas
Especialista en física
Especialista en Informática
Licenciado en Matemáticas y Física
Docente Auxiliar Universidad Tecnológica de Pereira
Gerardo7@utp.edu.co

Juan Luis Arias Vargas

Magíster en la enseñanza de la Matemática
Ingeniero Industrial
Docente asistente Universidad Católica Popular del Risaralda
Docente Catedrático asistente Universidad Tecnológica de Pereira
JLarias@ucpr.edu.co

Recibido Mayo 29 de 2008 – Aceptado Julio 08 de 2008

RESUMEN

De acuerdo con los resultados obtenidos en la investigación: “Didáctica para la Enseñanza de la Probabilidad en la Educación Media”, presentada como requisito para optar al título de Magíster en la Enseñanza de la Matemáticas, otorgado por la Universidad Tecnológica de Pereira, uno de los temas que deben ser enseñados en ese nivel de educación y que presenta un alto grado de dificultad para ser comprendido por los estudiantes es el Cálculo de la Probabilidad Condicional. En este sentido, se presenta un método que permite facilitar el proceso enseñanza-aprendizaje de esta temática a los jóvenes que en esta etapa de su

¹ Producto derivado de la tesis de grado “Didáctica para la enseñanza de la probabilidad en la Educación Media” presentado por Juan Luis Arias Vargas, bajo la dirección del Msc. José Gerardo Cardona Toro, para optar al título de Magíster en la Enseñanza de la Matemáticas con énfasis en Estadística, otorgado por la universidad Tecnológica de Pereira.

formación están pasando del pensamiento concreto al formal.

La metodología presentada consiste en realizar una reducción del espacio muestral en una y en dos variables, tomando como punto de partida la probabilidad conjunta y marginal para el caso bi-variado y desde allí poder explicar el concepto y la forma de conceptualizar el mismo por medio de ejemplos.

Palabras Clave

Cálculo de probabilidad, probabilidad condicional, educación media, competencias, estándares, aleatoriedad.

ABSTRACT

According to the results obtained in the research Project: (Didactics for Teaching the Probability in Middle Education”, presented as a requirement to get the academic title of MA: in Mathematics Teaching, offered by the Universidad Tecnológica de Pereira, one of the topics that must be taught at that level of education, and which presents a high difficulty degree to be understood by the students, is the Calculus of the Conditional Probability. In this sense, a method that allows facilitating the teaching-learning process on this topic, to young people who are passing from concrete to formal thought is introduced.

The methodology consists on reducing the sample space in one and two variables, taking as a starter point the conjunctive and marginal probability for the bi-varied case, in order to explain the way to conceptualize it through examples.

Key Words:

Calculus of the Probability, Conditional Probability, middle education, competences, standards, aleatority.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo es el resumen de la ponencia: “Didáctica para la Enseñanza de la Probabilidad Condicional”, presentada en el evento denominado “Primer Encuentro Regional de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales”, realizado en la Universidad Católica Popular del Risaralda en el mes de noviembre de 2007.

En la enseñanza de la probabilidad, uno de los temas que puede presentar mayor dificultad para ser comprendido y conceptualizado por parte de los estudiantes, es la probabilidad condicional. Esto se debe a un factor como el siguiente: El valor de la probabilidad del suceso depende de un evento que ya sucedió, de tal forma que aplicar el algoritmo utilizado para calcular una probabilidad condicional en muchas ocasiones resulta ser muy abstracto y difícil de comprender, convirtiéndose en la mayoría de los casos en una fórmula más que se aplica sin que realmente se entiendan los conceptos que allí se están manejando.

La didáctica se enmarca en una propuesta general para la enseñanza de la probabilidad en la Educación Media y se centra en particular en el caso de la probabilidad condicional, utilizando el método de reducción del espacio muestral en una y dos variables, valiéndose de la tabla de contingencia para el caso bi-variado para calcular las probabilidades conjuntas y marginales y desde allí sustentar el procedimiento propuesto para tal fin.

La comprensión y aprehensión de este concepto de una forma clara se hace importante, ya que se convierte en una herramienta fundamental para el cálculo de la probabilidad, cuando se utilice el teorema de Bayes de la probabilidad de eventos independientes y de la probabilidad completa que es consecuencia directa de la temática en cuestión.

PROPUESTA GENERAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

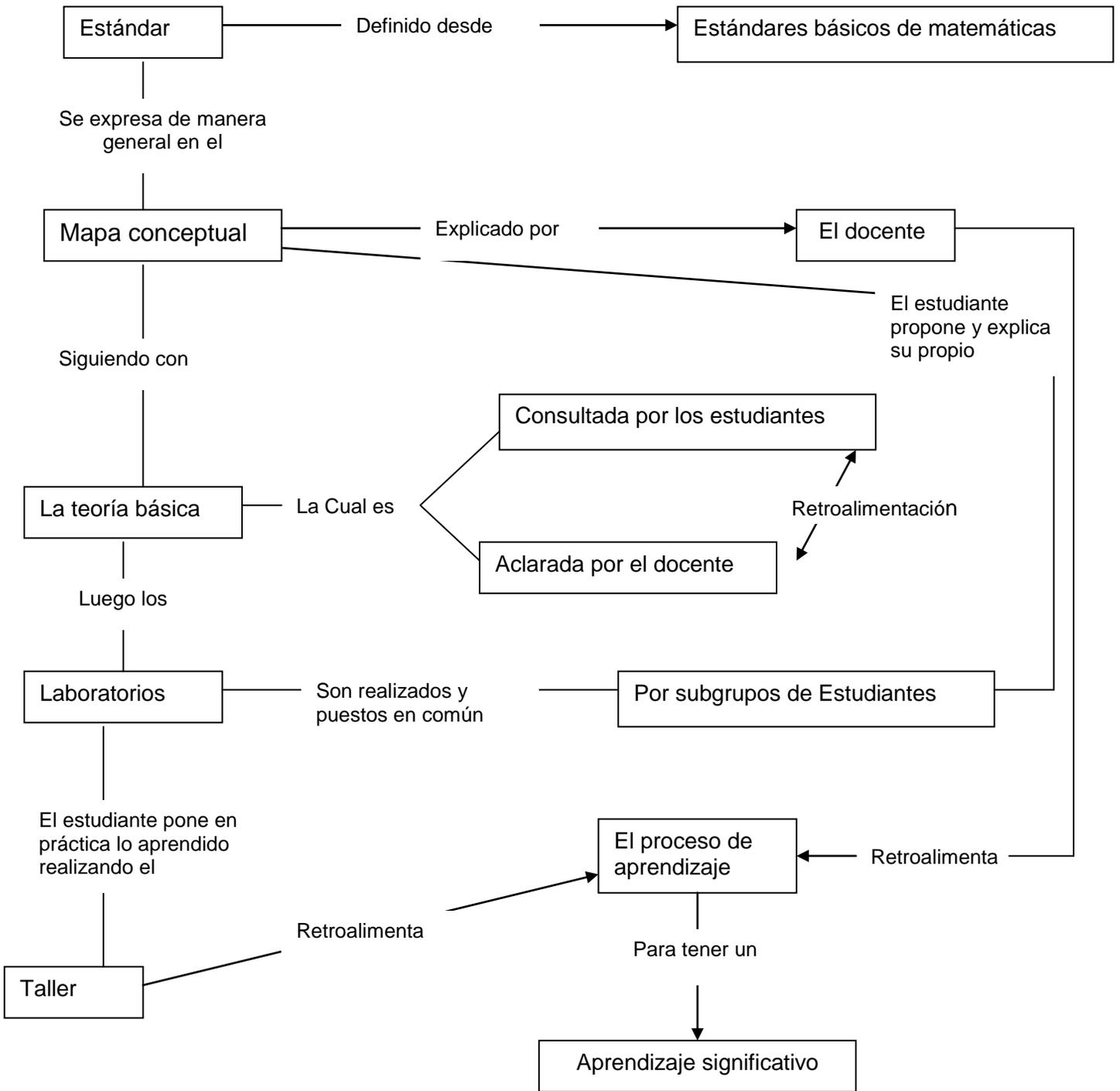
Para los temas específicos que desde los estándares básicos de matemáticas se han fijado, pueden utilizarse elementos como los mapas conceptuales, para mostrar de forma general una gran red de conceptos y de manera específica el contenido de cada estándar; de igual manera se propone que el docente a partir de la explicación verbal de cada tema relacione los contenidos con las vivencias del joven, enmarcando los temas dentro del contexto del diario vivir, utilizando los preconceptos y consultas realizadas por los estudiantes, de tal forma que se puedan organizar ideas de anclaje que permita la comprensión y aprehensión de los conceptos básicos, y finalmente se proponen laboratorios y talleres que ayuden al estudiante a una conceptualización total del tema, con el fin de que el educando logre un verdadero aprendizaje, duradero y comprensivo, es decir un aprendizaje significativo. La evaluación de estos laboratorios y talleres debe hacerse mediante la exposición de los resultados conseguidos por los alumnos a manera de plenarias, de tal forma que, con la participación en la corrección por parte del docente y de los demás estudiantes del grupo se confirme el fin último de la enseñanza: el aprendizaje.

En este sentido, y con el fin de realizar la transposición didáctica para la enseñanza de la probabilidad en la educación media, la propuesta se plantea de tal forma que el estudiante

haga una adaptación de los nuevos conceptos, mediante la explicación verbal del docente con la ayuda del mapa conceptual y contextualizando los diferentes temas mediante ejemplos sencillos del diario vivir. En un segundo momento el estudiante tendrá una acomodación, para lo cual se propone que él realice la consulta de los de los conceptos vistos en el mapa conceptual y a su vez los contraste con la teoría básica expuesta luego por el docente, con la participación activa de los estudiantes. En un tercer momento el estudiante obtendrá una asimilación realizando el laboratorio propuesto y finalmente la significación de los temas vistos contrastando los resultados obtenidos en los laboratorios con la teoría, proponiendo sus propios mapas conceptuales y laboratorios y realizando los talleres propuestos. La idea tiene la siguiente estructura para cada estándar:

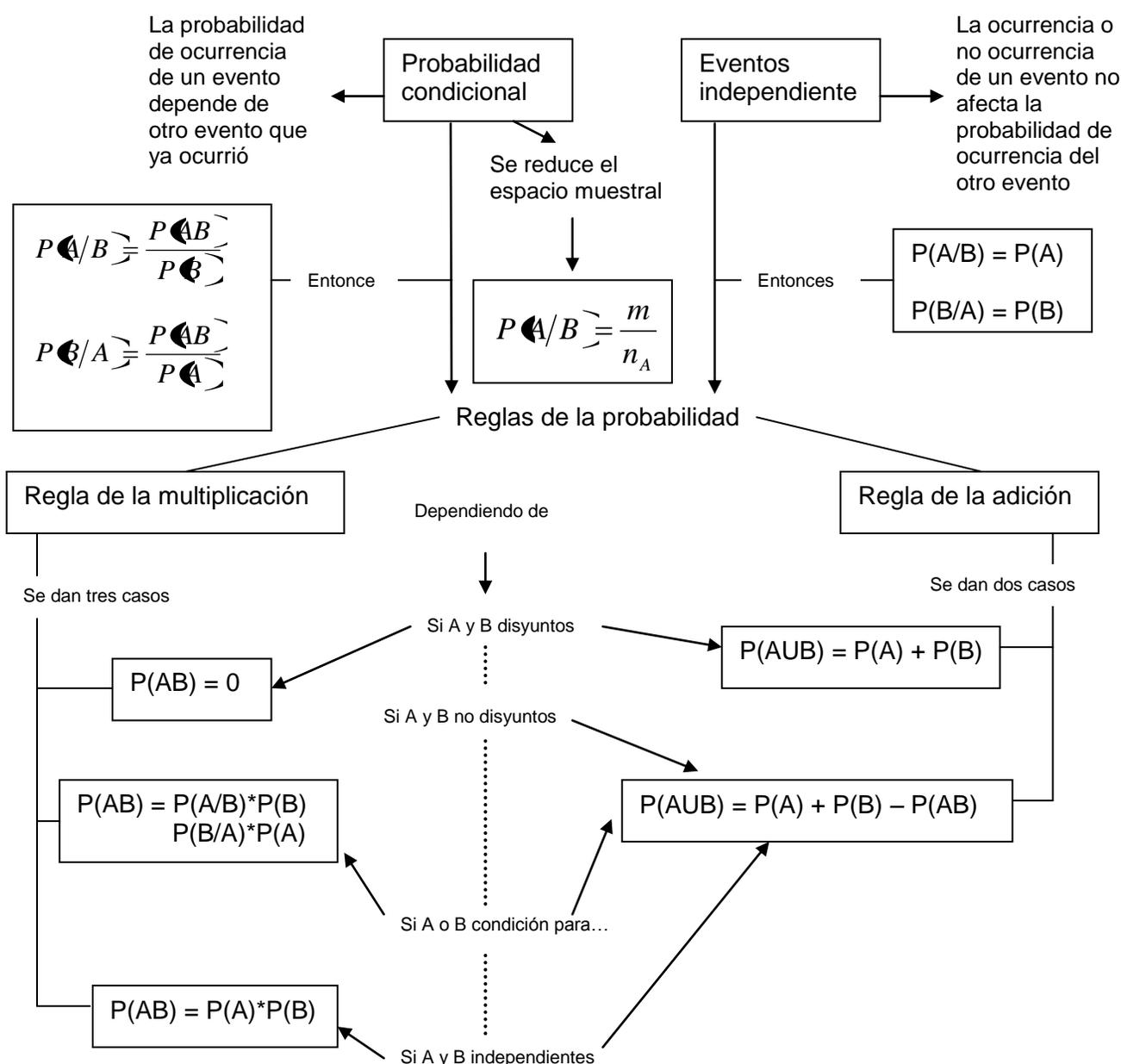
- El estándar.
- El mapa conceptual.
- La teoría básica de cada estándar:
- El laboratorio
- El taller

MAPA CONCEPTUAL PARA PRESENTAR LA PROPUESTA GENERAL



MAPA CONCEPTUAL PARA PRESENTAR LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

De acuerdo con los estándares mínimos y a las competencias definidas desde el Ministerio de Educación Nacional, se define la siguiente competencia: “Interpreto el concepto de probabilidad condicional e independencia de eventos”. Teniendo en cuenta lo anterior, el mapa conceptual se refiere al desarrollo de toda la competencia; sin embargo, la propuesta se restringirá sólo al cálculo de la probabilidad condicional.



FORMA TRADICIONAL DE ABORDAR LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Uno de los errores más comunes que se comete como docente y que además se plantea de esta forma en los textos, es que se define el concepto de probabilidad condicional y de una vez se pasa a exponer la fórmula como se muestra a continuación:

Definición: La probabilidad de un evento posterior depende de un evento que ya sucedió; sean A y B dos eventos determinados en un espacio muestral S, tal que $P(B) \neq 0$ y $P(A) \neq 0$, la probabilidad condicional se calcula por medio de una de las dos expresiones relacionadas a continuación:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \text{ Se lee probabilidad de que suceda A dado que ya ocurrió B}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \text{ Se lee probabilidad de que suceda B dado que ya ocurrió A}$$

Después de que las fórmulas son expuestas, se comienza, generalmente, a desarrollar ejercicios que tienden más a que se haga un reemplazo en la fórmula dada y no a que se comprenda el concepto como tal, es decir, este tipo de ejercicios se convierten en la realización de una tarea mecánica que en última instancia no aporta mucho al desarrollo del pensamiento aleatorio ni a aumentar el nivel de abstracción del estudiante.

La propuesta didáctica busca precisamente que el estudiante primero comprenda el concepto como tal, segundo que pueda, por sí mismo, llegar al descubrimiento de la expresión para

realizar el cálculo de la probabilidad condicional y tercero que pueda, posteriormente, aplicar esta regla de forma consciente y no mecánica, incorporando el concepto implícito que ella tiene.

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD CONDICIONAL

Como ya se indicó en la propuesta general, se deben tener en cuenta el estándar y la competencia a desarrollar, los preconceptos, la contextualización verbal por parte del docente, la explicación del tema desde el mapa conceptual y de manera particular para la probabilidad condicional. Teniendo en cuenta estos elementos, se puede abordar el contenido desde un ejemplo como el siguiente:

En el lanzamiento de un dado que se supone que no está cargado ¿cuál es la probabilidad de observar un número par, sabiendo que alguien que conoce el resultado del lanzamiento le indica que cayó un número mayor que tres?

Para la solución del problema se tiene que:

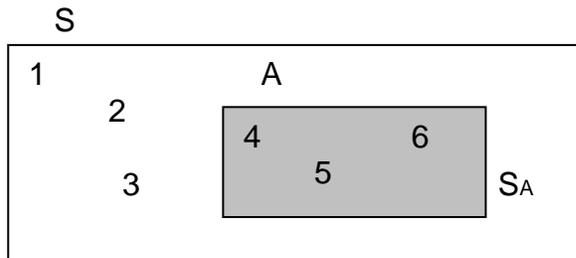
a. Se plantean los eventos A y B y la probabilidad pedida:

A: Observar un número mayor que tres

B: Observar un número par

$P(B/A)$ que se leería como la probabilidad de observar un número par, dado que ya se observó un número mayor que tres.

b. Se presenta el problema de manera gráfica así:



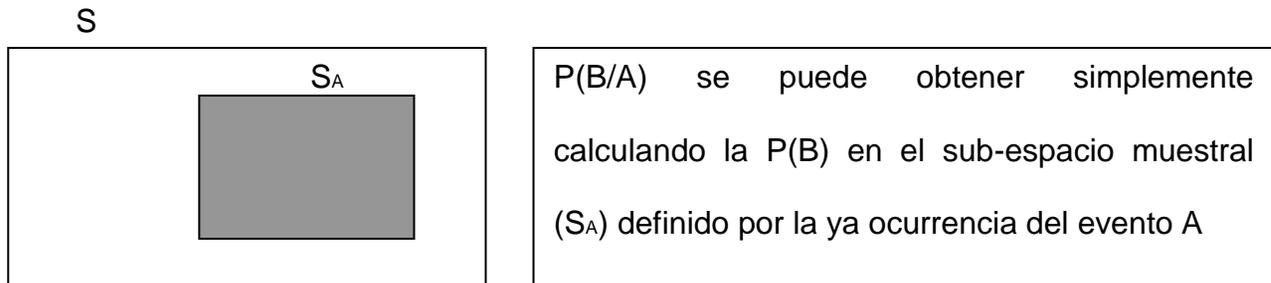
c. Con la ayuda de los estudiantes se podrá concluir que $P(B|A) = \frac{2}{3}$, ya que la probabilidad de observar un par $P(B)$ teniendo la información del evento $A: [4,5,6]$, lo cual denominaremos sub-espacio muestral (S_A), es 2 de 3.

Nótese que para el ejemplo se usó $P(B|A) = \frac{m}{n_A}$, donde m es el número de puntos muestrales que son favorables para el evento B y n_A es el tamaño del sub-espacio muestral conformado por los puntos muestrales que satisfacen el evento A , no obstante en este caso específico los puntos muestrales son equi-probables; sin embargo, si no ocurre lo anterior el procedimiento es el mismo sólo que la probabilidad se calcularía como $P(B|A) = \sum_m P(e_i)$, donde $P(e_i)$ es la probabilidad de cada punto muestral que pertenece a m .

De igual manera se pueden plantear otros ejemplos en este sentido para finalmente generalizar con el siguiente enunciado:

Sean los eventos A y B que pertenecen a un mismo espacio muestral simple (correspondiente a una sola variable), la probabilidad condicional se puede calcular por medio de una reducción del espacio muestral, es decir, obtener la probabilidad calculada por

conteo de puntos muestrales sobre el sub-espacio muestral que está compuesto por los puntos muestrales definidos por el evento que ya ocurrió.



Por otro lado, también se emplea implícitamente el concepto de probabilidad condicional y el cálculo de la misma, además se realiza haciendo una reducción del espacio muestral cuando se efectúa una extracción sin reemplazo de un conjunto de elementos y el problema consiste en calcular la probabilidad de que se cumpla una condición determinada en elementos que se extraen posteriormente, es clave aclarar este concepto, ya que es de suma importancia en la definición de distribución de probabilidad hipergeométrica que se estudia posteriormente.

Un ejemplo para este caso es el siguiente: En un grupo hay 30 estudiantes de los cuales 10 son hombres. Si se realizan dos extracciones sin reemplazo ¿cuál es la probabilidad de que la segunda extracción corresponda a una mujer, si se sabe que la primera fue de un hombre?

Para la solución del problema se tiene que:

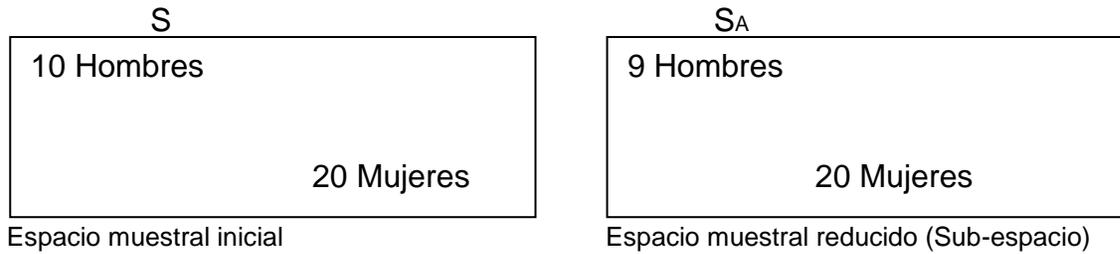
a. Se plantean los eventos A y B y la probabilidad pedida:

A: Observar un hombre en la primera extracción

B: Observar una mujer en la segunda extracción

$P(B/A)$ que se leería como la probabilidad de elegir una mujer dado que ya se extrajo un hombre.

b. Se presenta el problema de manera grafica así:



c. Con la ayuda de los estudiantes se podrá concluir que $P(B/A) = \frac{20}{29}$.

Hasta el momento sólo se ha realizado el cálculo de probabilidad condicional involucrando espacios muestrales definidos para una sola variable, lo que se denominó espacio muestral simple, sin embargo, es para espacios muestrales conjuntos (definido para dos variables) donde el concepto toma mayor importancia, porque desde allí se puede deducir la expresión para calcular la probabilidad en cuestión y derivar la ley de la multiplicación y el concepto de probabilidad completa. Por medio del siguiente ejemplo se mostrará como deducir la regla para el cálculo de la probabilidad condicional y con base en ella, el estudiante podrá decidir en qué casos puede ser más conveniente el uso de la misma pero de una forma comprensiva o en cuáles otros debe usar la reducción del espacio muestral, ya que se facilitan los cálculos.

En un estudio sobre la preferencia de hombres y mujeres por los dispositivos externos para guardar información se tuvieron los siguientes resultados

| Sexo/Dispositivo | DVD (D) | CD (C) | Memoria USB (U) | Total |
|------------------|---------|--------|-----------------|-------|
| Masculino (M) | 75 | 105 | 50 | 230 |
| Femenino (F) | 90 | 100 | 60 | 250 |
| Total | 165 | 205 | 110 | 480 |

- Calcular la probabilidad conjunta y marginal
- Calcular la probabilidad de que al escoger una persona sea de sexo masculino dado que usa CD.
- Calcular la probabilidad de que al escoger una persona sea de sexo femenino dado que usa Memoria USB

Solución:

Se definen los siguientes eventos

D: Usar DVD para el almacenamiento de la información

C: Usar CD para el almacenamiento de la información

U: Usar memoria USB para el almacenamiento de la información

M: Sexo Masculino

F: Sexo Femenino

a. Probabilidad conjunta y marginal

| Eventos | (D) | (C) | (U) | Prob. Marginal |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| (M) | $P(MD)=0.15625^*$ | $P(MC)=0.21875^*$ | $P(MU)=0.10417^*$ | $P(M)=0.47917^{**}$ |
| (F) | $P(FD)=0.18750^*$ | $P(FC)=0.20833^*$ | $P(FU)=0.12500^*$ | $P(F)=0.52083^{**}$ |
| Prob. Marginal | $P(D)=0.34375^{**}$ | $P(C)=0.42708^{**}$ | $P(U)=0.22917^{**}$ | 1.00000 |

Probabilidad conjunta*; Probabilidad marginal**

b. Se resuelve utilizando la reducción de espacio muestral así:

$$P(M/C) = \frac{105}{205} = 0.5122$$

De 205 personas que usan CD, 105 son hombres, se aplica el algoritmo de tal forma que:

$$P(M/C) = \frac{P(MC)}{P(C)}$$

Se tiene que $P(MC) = \frac{105}{480} = 0.21875$ y $P(C) = \frac{205}{480} = 0.42708$

$$\text{Luego } P(M/C) = \frac{0.21875}{0.42708} = 0.5122$$

c. Haciendo uso de la reducción del espacio muestral

$$P(F/U) = \frac{60}{110} = 0.54545$$

De 110 personas que utilizan memoria USB, 60 son mujeres, si se aplica el algoritmo se tiene que:

$$P(F/U) = \frac{P(FU)}{P(U)}$$

Dado que $P(FU) = \frac{60}{480} = 0.12500$ y $P(U) = \frac{110}{480} = 0.22917$

$$\text{Entonces } P(F/U) = \frac{0.12500}{0.22917} = 0.54545$$

Por medio del ejemplo anterior se puede deducir de manera intuitiva con el estudiante, cómo se conforma la regla para el cálculo de la probabilidad condicional y de la misma tabla se consigue derivar el concepto de probabilidad completa y la regla de la multiplicación para eventos condicionados, posteriormente extrapolar estos hallazgos a un espacio muestral simple. Vale la pena aclarar que el concepto de probabilidad completa y la regla de la multiplicación no son de interés para el artículo.

CONCLUSIÓN

Para que el estudiante alcance a comprender y aprehender el concepto de la probabilidad condicional y pueda realizar su cálculo respectivo debe tener claridad sobre alguna terminología y algunos conceptos previos, de allí que la propuesta se basa en la verificación de estos preconceptos, en la contextualización verbal, por medio del docente apoyándose en el mapa conceptual y en la cotidianidad, pero lo más importante es no proponer una regla mágica para calcular la probabilidad condicional, sino orientar al estudiante mediante ejemplos para que intuya los componentes de la fórmula que le va a servir mas adelante para calcular probabilidades condicionales, pero de forma consciente dejando de lado el mecanicismo al que se puede llegar si simplemente se propone la expresión matemática. Por otro lado, en diversas ocasiones resulta mucho más sencillo resolver el problema aplicando simplemente la reducción del espacio muestral para el cálculo de la probabilidad condicional como se mostró en los ejemplos propuestos. Se debe tener en cuenta que para terminar el proceso de conceptualización es necesario que se proponga un laboratorio y un taller para que el estudiante pueda, desde su misma experiencia, alcanzar las competencias propuestas para el desarrollo de este estándar.

BIBLIOGRAFÍA

- Batanero, Carmen. (2001). *Didáctica de la Estadística*: Granada. GEEUG.
- Cascallana, María Teresa. (1999). *Iniciación a la Matemática*. España: Aula XXI/Santillana.
- Mendenhall, William. Wackerly, Dennis D. and Scheaffer Richard L. (1994). *Estadística Matemática con Aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Mendenhall, William and Reinmuth, James E. (1978). *Estadística para Administración y Economía*: México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares Básicos de Calidad en Matemática y Lenguaje*. (2003). Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares Básicos de Calidad en Matemática y Lenguaje*. (2005). Bogotá.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. (1998). Bogotá: Editorial Libros y Libros S.A.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Revolución Educativa Colombia Aprende*. (2005). Bogotá.
- Newbold, Paul. (1997). *Estadística para los Negocios y la Economía*. España.
- Rencoret Bustos, María del Carmen. (1994). *Iniciación en Matemática*. Chile: Editorial Andrés Bello.
- <http://www.ugr.es/~batanero/ListadoEstadistica.htm>
- http://es.wikipedia.org/wiki/Probabilidad_condicionada
- <http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/Estadistica/sucesos/sucesos.html>