Entre Ciencia e Ingeniería, ISSN 1909-8367
Año 4. No. 8 – Segundo semestre de 2010, páginas 67 -82

El Principio de Las Casillas

The Box Principle

Yu Takeuchi
Físico Teórico
Magíster en Matemáticas
Pensionado Universidad Nacional de Colombia (Bogota)

Juan Carlos Henao López
Est. Maestría en Ingeniería Eléctrica
Especialista en Pedagogía y Desarrollo Humano
Ingeniero Electricista
Docente Institución Educativa INEM Felipe Pérez
Docente Catedrático Universidad Católica Popular del Risaralda
Grupo de Investigación GEMA
juan.henao@ucpr.edu.co

Juan Luis Arias Vargas
Magíster en la enseñanza de la Matemática
Especialista en Administración de la Informática Educativa
Ingeniero Industrial
Docente Auxiliar Universidad Católica Popular del Risaralda
Docente Catedrático Auxiliar Universidad Tecnológica de Pereira
Grupo de Investigación GEMA
Juan.arias@ucpr.edu.co

Recibido Agosto 15 de 2009 – Aceptado Diciembre 13 de 2010

SÍNTESIS

El Principio de las Casillas o conocido también como el Principio del Cartero, es un teorema clásico de las matemáticas usado para desarrollar otras demostraciones especialmente en el campo de la teoría coordinatoria, de los números reales y la teoría de conjuntos. Este artículo ilustra la demostración del teorema realizada por el doctor Yu Takeuchi en su presentación en el Primer Encuentro Nacional y Tercero Regional sobre la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, adelantado en la Universidad Católica Popular del Risaralda en octubre de 2009. Igualmente se ilustran algunas aplicaciones importantes de este teorema.

Descriptores: *principio las casillas, teorema, principio del cartero, teoría de conjuntos.*

ABSTRACT

The Box Principle or also known as the Postman Principle is a classic theorem of mathematics which is used to develop other theorems, especially in the field of "cordinatoria" theory, set theory and real numbers theory. This article illustrates the proof of the principle argued by Dr. Yu Takeuchi in his lecture at the First National and Third Regional Meeting Natural Science Teaching Conference hosted by the Universidad Católica Popular de Risaralda in October 2009. It also provides some important applications of this theorem.

Descriptors: The box principle, theorem, the mailman principle, cluster´s theory.

1. INTRODUCCIÓN.

Desde muy temprana edad, los niños deben aprender a contar como parte de un proceso que desarrolla en ellos habilidades cognitivas y cognoscitivas que les permite asociar una cantidad de objetos presentes en un conjunto a una representación mentefacta simbólica, lo que les faculta más adelante para comprender otros tipos de relaciones y operaciones importantes en las matemáticas.

Lo interesante en estos primeros estadios del desarrollo humano es que lo niños y niñas asocian el contar con el cantar; de hecho, es una estrategia didáctica empleada por docentes de básica primaria para que aprendan a contar cantando, que a la vez les permite desarrollar -aunque sea por razones equivocadas- el concepto de desigualdad (mayor, igual o menor que). A pesar de lo difícil que es contar, los autores no tienen interés ni en cambiar la estrategia empleada por los maestros ni en mostrarle a los chicos y chicas lo complejo de este proceso, más bien el objetivo es establecer una demostración matemática, inductiva y estructurada de uno de los principios más útiles de análisis numérico, de la teoría coordinatoria, de las probabilidades y de muchas otras aplicaciones matemáticas: “El Principio de las Casillas”, conocido también como “El Principio de Dirichlet”.

Para entender la naturaleza de este principio, es importante hacer claridad en que las proposiciones en matemáticas son por lo general de dos tipos, universales y existenciales: las proposiciones universales establecen que algo es verdadero o cierto para todos los valores o situaciones posibles en algún conjunto dado; las proposiciones existenciales por su parte, establecen que algo es verdadero por lo menos para algún valor o situación en un conjunto específico. Las proposiciones universales se expresan en la forma

“Para todo x (en el conjunto A), P(x),”

Las proposiciones existenciales se expresan en la forma donde P(x) es un proposición referente a x.

El matemático alemán Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1804-1859) formula este principio desarrollado inicialmente para la teoría de números y las proposiciones existenciales, pero tiene una amplia aplicación en muchas disciplinas de las matemáticas a pesar de su aparente simplicidad.

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

El principio de Dirichlet en su forma más simple establece que

> Si n elementos son repartidos en m cajas, con n>m entonces existirá por lo menos una caja que contendrá al menos elementos
>
> $$\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

Donde la función [a] recibe el nombre de entero mayor que devuelve para cualquier número real el entero igual o más próximo superior.

Este principio también se puede asociar con las siguientes situaciones:

@ Un cartero tiene que repartir n+1 cartas entre n casillas, entonces existirá por lo menos una casilla que recibirá por lo menos dos cartas.

@ Si ocho personas deben escoger un día para realizar un examen, por lo menos dos de ellas escogerán el mismo día.

@ Se tienen n nidos y en ellos duermen n+1 palomas, al menos hay un nido en el que duermen más de una paloma.

@ En una reunión de tres personas, por lo menos dos tendrán el mismo sexo.

@ En una reunión con trece personas, por lo menos dos nacieron el mismo mes.

@ En una convención de 400 personas, por lo menos hay dos personas que cumplen años el mismo día.

Nótese que este principio no particulariza explícitamente los elementos que son iguales o las posiciones de los mismos dentro de un conjunto, sólo asegura la existencia de ciertas condiciones o de cierto número de elementos que cumplen con alguna condición.

3. PRINCIPIO DE LAS CASILLAS

Para demostrar este principio considérese la siguiente situación:

“Si un cartero reparte n cartas en m casillas, con la condición que n>m, alguna de las casillas recibe dos o más cartas”.

Sean $A = 1,2,3\ldots,n$ $B = 1,2,3\ldots,m$ dos conjuntos equipotentes, si n>m entonces existe una función $f: 1,2,3\ldots,n \rightarrow 1,2,3\ldots,m$ tal que la función f sea inyectiva, es decir uno a uno, y sobreyectiva a la vez, lo que implica que el rango de la función es igual al conjunto de llegada (1,2,3…,n corresponde al dominio de la función f o conjunto de partida y 1,2,3…,m es el recorrido de f o conjunto de llegada)

Como n>m, por el principio de las casillas, existen los elementos i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$ y k casillas tal que $1 \leq k \leq m$ tales que se cumple la relación

$$f(i) = f(j) = k$$

Contradiciendo que f es una función inyectiva, lo que es un absurdo y termina esta parte de la demostración.

Suponiendo ahora que la norma de B es cero $|B| = 0$, es decir, es un conjunto vacío entonces no existe ninguna función de A en B tal que sea inyectiva e igualmente termina la demostración.

En el caso que $|A| = n+1$ y $|B| = n$ necesariamente $|A| > |B|$ lo que implica suponer que la función es no inyectiva, ahora si A es un conjunto no vacío y no unitario, deben existir dos elementos i, j tal que

$$f(i) = f(j)$$

E igualmente termina la demostración. Pero si no existe esa igualdad entre los elementos i, j, es decir, i solo tiene una preimagen en B $f(i) = k$, entonces se puede definir la función g

$$g: A - i \rightarrow B - k$$

Como $B - k$ tiene ahora n–1 elementos y entonces se puede concluir que

$$|A| - 1 > |B| - 1$$

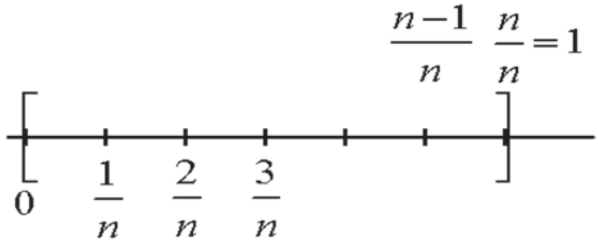
Lo que implica que g no es inyectiva y por tanto f no es inyectiva, que es lo que se busca demostrar.

Demostracion por inducción

Sea a un número irracional positivo, entonces la sucesión de las partes decimales de los números

$$O, a, 2a, 3a, 4a\ , \ldots, na$$

Contiene a n+1 elementos, tomando la unidad y dividiéndola en n partes iguales, representando cada una, una casilla entonces por lo menos una casilla de contener dos de estos elementos.



Si pa, qa son dos elementos de esa sucesión entonces, para que el conjunto sea denso se debe cumplir

$$|\ pa\ -\ q(a)\ | < \frac{1}{n} \text{ pero como } n \to \infty \text{ entonces}$$

$$|\ pa\ -\ q(a)\ | \to 0$$

Según el teorema de Dirichlet que es un conclusión directa del Principio de las Casillas, si a es un número irracional entonces existen dos sucesiones de números naturales

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n, \ldots$$
$$j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n, \ldots$$

Tal que $aj_n - k_n \to 0$ cuando $n \to \infty$

Dado donde $pa = p_o + pa$ donde p_0 es la parte entera de pa y $qa = q_0 + qa$ donde q_0 es la parte entera de qa entonces

$$pa - qa = a\ p–q = p_0 - q_0 + pa - qa$$

Pero $p_0 - q_0$ es un número natural, al igual que $p - q$, llamando

$$p - a = jn\ Y\ p_o – q_0 = k_n$$

Se llega a $aj_n + k_n = | pa - qa| \to 0$

Con lo cual se comprueba que $aj_n + k_n \rightarrow 0$ Que es lo que se quiere demostrar.

Teorema de aproximación de Dirichlet (I)

Demostración por Inducción.

Sea la relación

$n_k = j_k a + e_k$ [Ec. 1]

Donde n_k y j_k son números naturales; dado

$$a = |\varepsilon_k| m_k + \varepsilon^*_{k+1}$$ [Ec. 2]

Donde m_k es un número natural y $\left|\frac{\varepsilon^*_{k+1}}{\varepsilon_k}\right| \leq \frac{1}{2}$

Multiplicando a [1] por m_k se obtiene

$$n_k m_k = j_k m_k a + e_k m_k$$

Utilizando [2]

$$n_k m_k = j_k m_k a \pm \ a - \varepsilon^*_{k+1} \ = \ j_k m_k \pm 1 \ a \mp \varepsilon^*_{k+1}$$

Si $n_{k+1} = n_k m_k$, $j_{k+1} = j_k m_k \pm 1$ y $\varepsilon_{k+1} = \mp \varepsilon^*_{k+1}$ se obtiene finalmente que

$$n_{k+1} = j_{k+1} a + \varepsilon_{k+1}$$

Donde $\left|\frac{\varepsilon^*_{k+1}}{\varepsilon_k}\right| \leq \frac{1}{2}$

Teorema de aproximación de Dirichlet (II)

Dados a y b con a irracional existen dos sucesiones de números naturales n_k y j_k y una sucesión e_k tales que

$$n_k = aj_k + e_k + b$$ [Ec. 4]

Con $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$

Sean *nk , jk, ek* tres sucesiones construidas en *i* y $q_k = \left|\frac{b}{\varepsilon_k}\right|$ la parte entera de $b/_{\varepsilon_k}$ y $\left\langle \frac{b}{\varepsilon_k} \right\rangle$ su parte fraccionaria entonces

$b = e_k q_k + \lambda_k$ [Ec.5]

Como $\frac{b_k}{\varepsilon_k} = \left| \frac{b_k}{\varepsilon_k} \right| + \left\langle \frac{b_k}{\varepsilon_k} \right\rangle$

Y con $|\lambda_k| < |\mathcal{E}_k|$

Puesto que $\lambda_k = \varepsilon_k \left\langle \frac{b}{\varepsilon_k} \right\rangle$

Entonces, usando [5]

Donde $n_k q_k$, $j_k q_k$ son números naturales $\lambda_k \to 0 \quad k \to \infty$ y terminando esta parte de la demostración.

Aplicaciones del principio de las casillas en la demostración de otros problemas.

Ejemplo 1: Problema del Profesor José Francisco Caicedo.
El conjunto $T = k^2 - a^2 j^2 \mid k, j$ € tiene punto de acumulación en $-2a, 2a$, donde a es un número irracional.

Solución: Basta demostrar que existe un número infinito de parejas (k, j) tales que

$$-2a < k^2 - a^2 j^2 < 2a \qquad \text{[Ec. 6]}$$

De la ecuación anterior

$$k^2 - a^2 j^2 > -2a \text{ si y sólo si } aj > k\left(1 - \frac{2a}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = k - \frac{a}{k}$$

$$k^2 - a^2 j^2 < 2a \text{ si y sólo si } aj < k\left(1 - \frac{2a}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = k - \frac{a}{k}$$

Para todo k suficientemente grande por el desarrollo del binomio

Por el teorema de aproximación de Dirichlet (una aplicación del teoema de las casillas), existen dos sucesiones de números naturales

$$k\,1\,,\,k\,2\ldots,\,k\,n\,,\,\ldots\,y\,j\,1,\,j\,2\ldots,\,j\,n\,,\,\ldots$$

Tales que $|k \;\; n \; - a \cdot j \;\; n| < \frac{1}{n} < \frac{a}{k \;\; n} \to 0$ cuando $k \;\; n \to \infty$

Ya que $k\,n$ es menor que la parte entera de $p \,.\, a < n \,.\, a$

Teorema de aproximación de Dirichlet (III)

En II, sean a = 2π , b = arcsin y con -1≤ y ≤ 1 , entonces

sean $n_k q_k = sen\ 2\pi j_k q_k + sen^{-1}\, y - \lambda_k = sen\ sen^{-1}\, y = y$

Cuando $k \rightarrow \infty$

Por lo tanto se tiene que $\lim\sup \mathrm{sen}\, n = 1$ y $\lim\sup \cos n = 1$, pero generalmente los conjuntos
$sen\ n/n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ y $cos\ n/n=1,2,3,\ \ldots$ y son densos en $-1,1$

Ejemplo 2. Dados dos conjuntos $A\ \ 1,2,3,\ldots m\ \ y\ \ B\ \ 1,2,3,\ldots n,$ entonces m=n

Demostración: Se tiene que

$$1,2,3,\ldots m\ y\ B\ 1,2,3,\ldots n,$$

Donde la equipotencia es transitiva, es decir, existe una aplicación (función) uno a uno tal que[1]

$$f\ \ 1,2,3,\ldots m = 1,2,3,\ldots n,$$

.

1 El conjunto es el dominio de la función f, y el conjunto es el recorrido de la función f. Se dice que dos conjuntos A y B son equipotentes si existe una función de A sobre B y uno a uno.

El número $f(m)$ es un número natural entre 1 y n, la función f establece la siguiente equipotencia.

$$1,2,3,\ldots,m = 1,2,3,\ldots n, - f(m)$$

Pero

$$\begin{array}{cccccccc}
\{1, & 2, & 3, & \cdots, & f(m)-1, & f(m+1), & \cdots, & n\} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
\{1, & 2, & 3, & \cdots, & f(m)1, & f(m), & \cdots, & n-1\}
\end{array}$$

Así $1,2,3,\ldots,m - f(m) \quad 1,2,3,\ldots n, - \;1$ [Ec. 7]

Luego $1,2,3,\ldots,m - 1$ y $1,2,3,\ldots n, - \;1$ [Ec. 8]

Y así sucesivamente, dado que $m \geq n$ se tiene

$$1,2,3,\ldots,m - n + 1 \quad 1$$

Esto es $m = n$ Ya que $m - n + 1 = 1$

Este ejercicio también se puede demostrar usando el Principio de las Casillas. Sea

$$1,2,3,\ldots,n \text{ y } 1,2,3,\ldots m,$$

Dos conjuntos equipotentes, suponiendo que n>m entonces existe un función

$$f: 1,2,3,\ldots,n \;\; \rightarrow 1,2,3,\ldots, m,$$

Tal que f es uno a uno y sobre ($1,2,3,\ldots,n$ es el dominio de la función f y $1,2,3,\ldots,m$ es el recorrido de la función f). Como n>m por el **Principio de las Casillas** existen

$$k \;\; 1 \leq k \leq m \text{ y } i, j \;\; 1 \leq i \leq j \leq n \text{ tales que}$$

$$f(i) = f(j) = k$$

Contradiciendo que f es uno a uno, lo que representa un absurdo y es lo que se quiere demostrar.

Para aplicar el teorema a diversas situaciones, resulta especialmente útil identificar quien hace las veces de las cartas, y quien hace las veces de las casillas.

Ejemplo 3: Sea A un conjunto de 20 elementos (cartas), formados de la progresión aritmética

$$1,4,7,10,\cdots 100$$

Existen por lo menos dos enteros distintos en A cuya suma es 104.

Solución: Para demostrar esto, el número de elementos en esta sucesión es

$$n=\frac{a_n-a_1}{r}+1=\frac{100-1}{3}+1=34$$

Exceptuando el 1 y el 52, se puede formar 16 parejas con todos los elementos de la serie sin repetir ninguno

$$4,1000,\ 7,97,10,94,\ldots\ 55,49$$

Por el Principio de las Casillas, como se forman parejas con 20 números de la sucesión, en el peor de los casos, tomando el 1 y el 52 para el conjunto A, necesariamente se debe tomar una pareja más, lo que garantiza que por lo menos una de estas sume 104.

Ejemplo 4. En una reunión hay n personas (cartas) donde algunos se conocen entre si y otros no (conocer una persona implica que si una persona conoce a otra, necesariamente la segunda conoce a la primera, es decir existe una reciprocidad) lo que hace las veces de las casillas, probar que existen dos personas que tienen el mismo número de conocidos.

Solución: Definiendo dos conjuntos A y B donde A agrupa a las personas (cartas) y B el número de personas que conoce cada una (casillas) entonces es posible definir una función f tal que:

$$f:\ A\rightarrow B$$
$$i\rightarrow f\ i$$

Donde i es iésima persona que conoce a $f\ i$ personas; como en este caso no se aplica el principio socrático "Conócete a ti mismo", entonces en primera instancia se podría pensar que no es posible aplicar el principio de las casillas, ya que el recorrido de la función seria el conjunto

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n-1$$

y la norma de ambos conjuntos seria igual, sin embargo considérense dos posibles situaciones:

Situación 1: Hay una persona x en la reunión que no conoce a nadie, esto es $f(x)=0$ lo que implica por reciprocidad que no hay nadie en la reunión que lo conozca a él, esto lleva a establecer que en el recorrido de la función no puede existir la imagen (n–1) siendo este conjunto

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n-2$$

Que tiene (n–1) elementos, así, aplicando el principio de las casillas, existe por lo menos dos personas que conocen el mismo número de personas.

Situación 2: Si todos cumplen la condición de conocer por lo menos a una persona, f no puede tomar el valor de cero y en consecuencia el número de posibilidades es menor, lo que garantiza la aplicación del teorema de las casillas.

Ejemplo 5: Sea A un conjunto de n números naturales; existe un subconjunto B que pertenece a $A\ (A\ C\ B)$ tal que la suma de sus elementos es un submúltiplo de la norma de A ($|A|$).

Solución: Llamando a n la norma de A y ordenando los elementos de A de mayor a menor se obtiene.

$$A = a_1 < a_2 < \ldots\ a_n$$

Obteniendo todos los subconjuntos de A, esto es es posible definir la función

$$f: 1, 2, 3, \ldots, n \rightarrow 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

$$i \rightarrow f(i) = \sum_{k=1}^{i} a_k \bmod n$$

Que devuelve los valores módulo n de los subconjuntos formados por las sumas $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots$, la dificultad radica en que ambos conjuntos tienen el mismo número de elemento, por lo cual se deben distinguir dos posibles situaciones

Situación 1: Si existe un i con $f(i) = 0$ el problema queda solucionado ya que

$$\sum_{k=1}^{i} a_k \equiv 0 \pmod{n}$$

Y el conjunto sería $B = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i$

Situación 2: Si no existe el elemento i, entonces la función sólo puede tomar valores de $1,2,3,\ldots,n-1$ y por principio de las casillas se establece que existen dos elementos $i \neq j$ *tal que* $f\ i = f\ j$.

$$\sum_{k=1}^{i} a_k \equiv \sum_{k=1}^{j} a_k \quad \bmod n$$

Lo que implica que

$$\sum_{k=i+1}^{j} a_k \equiv 0 \quad \bmod n$$

Y el conjunto sería $B = a_{i+1}, a_{i+1}, \ldots a_j$

Ejemplo 6: Dada una secuencia de 2n enteros consecutivos, al escoger (n+1) de ellos siempre será posible encontrar una pareja que se diferencia en n.

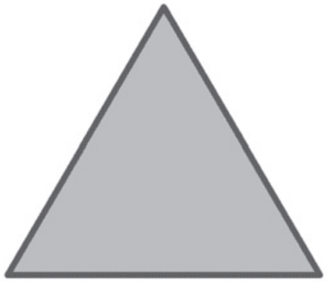
Solución: En este caso, se asocian los n+1 enteros con cartas y las parejas que se diferencien en n con las casillas, así, escribiendo la sucesión de números como

$$a+1, a+2, a+3, \cdots, a+2n$$

Para cualquier entero *a*, si se ordena la serie y se escogen n parejas se obtiene el conjunto

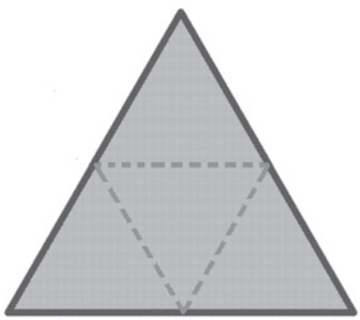
$$a + 1, a + n + 1,\ \ a + 2, a + n + 2,\ \ldots\ a + n, a + 2n$$

Entonces al escoger n+1 de estos enteros, al menos dos pertenecerán a la misma pareja diferenciándose en n.



Ejemplo 7: Un blanco para tiro tiene forma de triángulo equilátero de lado 20 cm de lado. Si se dispara cinco veces impactando el blanco demuestre que habrá por lo menos dos agujeros de bala con una distancia inferior a 10cm.

Solución: Como son cinco disparos, conviene dividir el triángulo en cuatro sectores de forma que dos agujeros en cada sector no estén a una distancia mayor a 10 cm (se forman triángulos equiláteros de lado 10cm), las cartas representan los puntos de impacto y las casillas las divisiones.



De los cinco disparos, por lo menos dos caerán en el mismo sector lo que garantiza que la distancia entre ellos no será superior a 10cm.

Ejemplo 8. Sean A y B dos conjuntos finitos no vacíos y sea f una aplicación de A à B, entonces existe un elemento $\tilde{b}$□B tal que

$$\left|f^{-1}\ \tilde{y}\ \right| \geq \frac{|A|}{|B|}$$

Demostración: Como

$$f^{-1}\ y\ = x$$

Tal que $x \in A$ por tanto

$$f(x) = y$$

Como f es una función, entonces cada elemento de A tiene una única imagen con lo cual

$$\sum_{y \in B} \left|f^{-1}\ y\ \right| = |A|$$

Lo que permite establecer que existe por lo menos un elemento

$$\tilde{y} \in B$$

Tal que $\left|f^{-1}\ \tilde{y}\ \right| \geq \frac{|A|}{|B|}$

BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. (Ed.) (1969). ***Selected Papers on Calculus.*** Washington D.C.: MAA.
- Haaser, N., LaSalle, J., & Sullivan, J. (1970). ***Análisis Matemático***. Curso Intermedio. Mexico: F. Trillas.

- Kolman, B., Busby, R., & Ross, S. (1996). ***Discrete Mathematical Strcutures.*** Mexico: Prentice-Hall.
- Pinto, P. C. (1999). ***O Principio das Gavetas.*** Eureka, 27-33.
- Santos, M. (1998). ***On the Implementation of Mathematical Problem Solving: Qualities of some Learning Activities.*** In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), Research in collegiate mathematics education. III, pp. 71-80. Washington, D.C.: American Mathematical Society.
- Takeuchi, Y. (1999). ***Sobre el Comportamiento Asintótico de Algunas Sucesiones de Polinomio***. Revista Colombiana de Matemáticas, 143-172.
- Young, R. (1992). ***Excursions in Calculus: an Interplay of the Continuous and the Discrete.*** Dolciani Mathematical Expositions Number 13. Washington: MAA.