Entre Ciencia e Ingeniería, ISSN 1909-8367
Año 6. No. 11 – Primer semestre de 2012, páginas 149-163

Una Metodología para la Enseñanza de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Mediante la Teoría de los Grupos de LIE en Cursos de Ingeniería[1]

A Methodology for Teaching Ordinary Differential Equations Trough the LIE Group Theory in Engineering Courses

Hugo Hernán Ortiz Álvarez
Ingeniero Químico
Especialista en educación Ambiental
Magister en enseñanza de las matemáticas
Estudiante de doctorado en Ingeniería
Grupo de investigación en matemáticas y estadística
Docente Investigador Universidad de Caldas
Universidad Nacional de Colombia
hugo.ortiz@ucaldas.edu.co

Francy Nelly Jiménez García
Ingeniera Química
Especialista en computación para la docencia
Magister en Física
Doctora en Ingeniería
Grupo de investigación en Física y Matemática con énfasis en la formación de ingenieros
Docente Investigador Universidad Autónoma de Manizales
Universidad Nacional de Colombia
francy@autonoma.edu.co

Abel Enrique Posso
Matemático
Magister en Matemática
Doctor en Ciencias Matemáticas
Grupo de investigación GEINED
Docente Investigador Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

Recibido Mayo 09 de 2011 – Aceptado Mayo 30 de 2012

[1] Producto derivado del proyecto de investigación: "Simetrías de Lie y ecuaciones diferenciales" en colaboración de: Universidad de Caldas, Universidad Autónoma de Manizales y Universidad Tecnológica de Pereira.

RESUMEN

En el presente artículo se propone una metodología que permite la incorporación de la teoría de los grupos de LIE, en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) de primer orden, a nivel de pregrado en cursos de ingeniería. Se plantea una discusión sobre los fundamentos teóricos del método de los grupos de LIE en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden y se identifican los presaberes necesarios para una adecuada enseñanza del método a este nivel.

Así mismo, se determina una metodología y se presentan los resultados de la aplicación de la misma en cursos regulares de EDO's, encontrándose que la metodología propuesta es adecuada para los estudiantes expuestos a la misma, ya que interiorizaron los presupuestos teóricos y el concepto unificador de la invariación bajo grupos de simetrías y logran resolver, en forma analítica, EDO's de primer orden tanto lineales como no lineales.

Palabras Clave: ecuaciones diferenciales, grupos de LIE, factor integrante.

ABSTRACT

This article presents a methodology that allows the introduction of the LIE theory in relation to first order ordinary differential equations for undergraduate engineering courses. The theoretical background needed is identified. A methodology was determined and the results of its application in the regular course of ODE's are presented. It was found that the proposed methodology is adequate. The students exposed to this methodology interiorized the related concepts and were able to solve linear and not linear first order ODE's analytically.

Key Words: differential equations, LIE groups, integrating factor.

1. INTRODUCCIÓN

Es innegable el impacto que el estudio de las ecuaciones diferenciales ha tenido en la solución de problemas prácticos de las ciencias y las ingenierías: el crecimiento de poblaciones, el desarrollo de reacciones químicas, las vibraciones libres y forzadas, los problemas de transferencia de masa y calor entre otros, son solo una muestra. Dichas ecuaciones han sido abordadas habitualmente bajo los puntos de vista analítico, numérico y cualitativo. Estos caminos, interdependientes entre sí, permiten una comprensión más completa de los fenómenos estudiados.

En particular la teoría que se expondrá en este escrito, permite la obtención de soluciones de tipo analítico “soluciones exactas” de ecuaciones diferenciales. Estas soluciones exactas pueden ser usadas como modelos para analizar el comportamiento de sistemas físicos y teóricos, tendencias al infinito; para contrastar y validar algoritmos usados en la obtención soluciones numéricas o como paso intermedio en la comprensión de fenómenos de naturaleza más compleja.

La teoría de los grupos de LIE en relación a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO’s) tuvo su origen a finales de 1800, cuando el matemático noruego Sophus Lie logró relacionar esta área con los trabajos de Evarist Galois en la solución de ecuaciones algebraicas. Entre los resultados más relevantes de Lie, está el haber identificado la invariación de una EDO de primer orden bajo un grupo de simetrías como una condición para su solución en términos de cuadraturas. Lo anterior permite abordar la mayoría de EDO’s que se estudian en un curso regular de ecuaciones diferenciales, desde una mirada unificadora que recoge bajo la característica de la invariación ecuaciones que históricamente se fueron resolviendo bajo diferentes heurísticas sin una aparente relación conceptual entre ellas.

Normalmente esta teoría se ofrece en cursos a nivel de maestría y doctorado en física o matemática o en cursos avanzados de pregrado en matemática. Lo anterior se debe a los presaberes y habilidades matemáticas necesarias para un tratamiento a fondo en este tema. Los docentes de cursos de ecuaciones diferenciales en programa de pregrado en ingeniería, enfrentan el desafío de enseñar técnicas de solución de EDOs de primer orden sin una base conceptual que las unifique. La gran mayoría de docentes de esta clase de cursos desconocen la existencia de la Teoría de LIE y los pocos que manejan esta temática, no cuentan con una metodología adecuada para su enseñanza a nivel de pregrado.

Por lo anterior se planteó la necesidad de diseñar un método apropiado para la incorporación de la Teoría de LIE en los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias a nivel de pregrado, la cual se describe en el presente trabajo y es fruto de un proceso conjunto al interior de los grupos de investigación: Física y Matemática con Énfasis en la Formación de Ingenieros (Universidad Autónoma de Manizales), GEINED (Universidad

Tecnológica de Pereira) y Matemáticas y Estadística (Universidad de Caldas).

2. DESARROLLO DE LOS CONTENIDOS

2.1 Conceptos Teóricos

Aunque es difícil por lo extenso de la Teoría de LIE recoger todos sus conceptos e implicaciones, se tratará de hacer una síntesis de los resultados más relevantes para el problema que se plantea.

2.1.1 Una ecuación diferencial de primer orden, $f(x,y,y')=0$ es invariante bajo un grupo de simetrías de la forma:

$$x_1=\varphi(x,y,\alpha), \qquad y_1=\phi(x,y,\alpha), \qquad y'_1=\theta(x,y,y',\alpha)=\frac{dy_1}{dx_1}, \tag{1}$$

(donde α toma valores en los reales), si $f(x_1,y_1,y'_1)=f(x,y,y')$, lo cual implica la condición de invariación,

$$df(x_1,y_1,y'_1)=0, \tag{2}$$

la cual es equivalente a la ecuación (3) [1],

$$\xi f_x+\eta f_y+(\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y(y')^2)f_{y'}=0 \tag{3}$$

donde,

$$\xi(x,y)=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}, \qquad \eta(x,y)=\left.\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} \tag{4}$$

2.1.2 A todo grupo uniparamétrico de transformaciones de la forma (1) están asociados generadores o simetrías infinitesimales dados por (4) si se imponen condiciones de diferenciabilidad adecuadas a las funciones que intervienen (Olvert, 1993).

2.1.3 Si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es invariante bajo un grupo de transformaciones uniparamétricas, entonces existe un factor integrante que puede construirse a partir de los generadores infinitesimales asociados a dicho grupo (Emmanuel, 2001) como lo expresa el teorema del factor integrante de LIE.

2.1.4 Teorema del Factor Integrante de LIE:

Suponga que la ecuación sobre un dominio simplemente conexo,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (5)$$

Es invariante bajo un grupo uniparamétrico, entonces la función

$$\mu(x) = \frac{1}{\xi M + \eta N}, \qquad \xi M + \eta N \neq 0, \qquad (6)$$

es un factor integrante de la ecuación dada.

La demostración del anterior teorema (Olvert, 1993 y Campos 1995) se sigue por la equivalencia entre la condición de integrabilidad de las ecuaciones exactas y la condición de invariación (3).

2.1.5 Si una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es invariable bajo un grupo de transformaciones uniparamétricas, entonces es posible construir un cambio de coordenadas bajo los cuales la ecuación diferencial se transforme en una de variables separables. Dichas coordenadas dependen también de los generadores infinitesimales (Bluman, 1989).

Ejemplo 1: Para una mayor claridad se aborda la solución de la siguiente ecuación diferencial, que si bien es una ecuación lineal con un proceso de solución suficientemente conocido, nos permite ilustrar el método que es útil para otro tipo de ecuaciones como las homogéneas y de Bernoulli entre otras.

$y' + \frac{3}{x} y = e^x$ Para esta ecuación se tiene:

$$f_x = -\frac{3}{x^2} y - e^x \qquad f_y = \frac{3}{x} \qquad f_{y'} = 1 \qquad y' = e^x - \frac{3}{x} y$$

Suponiendo ξ = 0, la ecuación (3) se reduce a: $\eta \frac{3}{x} + \eta_x + \eta_y (e^x - \frac{3}{x}) y = 0$

Asumiendo $\eta_y = 0$, se obtiene: $\eta = e^{-\int \frac{3}{x} dx}$

luego, un grupo bajo el cual es invariante esta ecuación diferencial está determinado por los generadores:

$$\xi = 0 \quad y \quad \eta = e^{-\int \frac{3}{x} dx}$$

El factor integrante de LIE para este caso es según la ecuación (6):

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = x^3$$

El método de las exactas conduce a la solución general:

$$y(x) = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$$

2.2 Búsqueda de los Generadores Infinitesimales

Como puede observarse, de la teoría expuesta y del ejemplo anterior, la identificación de los generadores infinitesimales es el paso crítico en el procedimiento de solución. Para una ecuación diferencial dada, la ecuación de invariación (3) requiere para su solución diversas heurísticas, una de ellas incluye el uso de tablas previamente elaboradas en las cuales se presentan generadores infinitesimales para algunas familias generales de ecuaciones diferenciales (Emmanuel, 2001).

De acuerdo a la definición de simetría de una ecuación diferencial, no es difícil intuir la posibilidad de la construcción de algoritmos computacionales que realicen la tediosa y casi siempre extensa labor del cálculo de simetrías, que cae como es obvio en el problema de la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Hereman hace una clasificación extensiva de los paquetes computacionales especializados en el cálculo de simetrías, (Hereman,1997), teniendo en cuenta los alcances de cada uno de ellos en el cálculo de simetrías puntuales (las que hemos analizado), generalizadas y no clásicas, de si resuelven o reducen el sistema determinante o si permiten o no interactuar con el usuario.

Entre la variedad de programas de computación que permiten encontrar las simetrías de una ecuación diferencial, se hace especial mención y uso del paquete LIE versión 5.1, cuyo autor es A.K Head, teniendo en cuenta que: es de dominio público desde 1996, última actualización año 2000, ocupa poco espacio de memoria para su instalación (328 KB), ha sido revisado y contrastado con innumerables ejemplos de la bibliografía clásica, su ejecución es relativamente simple y permite un seguimiento paso a paso en la rutina de solución.

Los ejemplos que se presentan en la documentación del programa han sido extraídos en su mayoría de referentes de esta teoría como son

(Campos, 1995 y Bluman, 1989) y se encuentran como archivos .DAT. Así mismo, la información de la ecuación diferencial a tratar debe grabarse en un archivo con esta misma extensión. Puede utilizarse por ejemplo el tradicional block de notas de windows que utiliza solo caracteres en mayúsculas.

Software comercial de amplio uso en nuestro medio como el Maple con su programa Liesymm (1994) y el Matematica con su programa Mathlie (1998) son también opciones a tener en cuenta para el cálculo de simetrías.

Uno de los aspectos más esenciales en el uso de este programa es hacer una adecuada entrada de los datos en archivo .DAT, se recomienda revisar los ejemplos que ofrece el programa en su documentación para tener una idea clara del orden que debe seguirse.

Ejemplo 2: Ecuación de Bernoulli

Para la ecuación de Bernoulli: $2xy\dfrac{dy}{dx}+2y^2+3x=0,$ (9)

se obtuvieron tres vectores:

$$v_1=-\frac{1}{x^2y}\frac{\partial}{\partial y},\qquad v_2=-x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{x}{2y}\frac{\partial}{\partial y},\quad \text{y}\quad v_3=\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{3}{2xy}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Para v_1 y v_2 es posible obtener los factores integrantes:

$$\mu_1(x,y)=\frac{-x}{2},\quad \text{y}\quad \mu_2(x,y)=-\frac{1}{2x(y^2+x)},$$ respectivamente,

los cuales transforman la ecuación (9) en una EDO exacta.

Para el generador v_3 esto no es posible, ya que el denominador para la ecuación (6) es cero. Los grupos asociados a vectores con esta característica reciben el nombre de grupos triviales.

Ejemplo 3: Ecuación de Riccati

Para la ecuación de Riccati:

$$x^3\frac{dy}{dx}-x^4y^2+2x^2y+1=0 \qquad (10)$$

se obtuvo el siguiente vector:

$$v_3 = 2y\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial x}$$

de donde se obtiene el factor integrante:

$$\mu(x,y) = -\frac{1}{x^5y^2 + 4x^3y - x},$$

el cual transforma la ecuación (10) en una EDO exacta.

3. DESARROLLO METODOLÓGICO

3.1 Identificación de la Metodología

No todos los temas de la Teoría de LIE pueden ser incorporados a un curso regular de EDOs, tanto por la extensión y complejidad de los mismos, como por el nivel de conocimientos requerido. El estudio de la Teoría de LIE revela dos caminos posibles para la solución de EDOs de primer orden que son:

3.1.1 Primero: *a partir de un grupo de transformaciones continuas o grupo de LIE, encontrar la ecuación de primer orden más general invariante bajo este mismo grupo.*

En este esquema es posible construir tablas de grupos uniparamétricos de transformaciones y familias de EDOs invariantes bajo estos mismos grupos. Lo anterior permite que una EDO dada, sea identificada si es del caso como perteneciente a una de las familias anteriores, o de forma equivalente reconocerla como invariante bajo un grupo de simetrías conocido. Identificado el grupo pueden construirse coordenadas o cambios de variables bajo los cuales la EDO se transforma en una de variables separables.

Cabe también la posibilidad de emplear el teorema del factor integrante de LIE para transformar la EDO en una exacta (ecuación de solución conocida).

3.1.2 Segundo: ***dada una ecuación diferencial de primer orden, hallar su ecuación de invariación infinitesimal y resolverla para encontrar las simetrías asociadas a grupos bajo los cuales es invariante la EDO,***

Nuevamente con dichos grupos es posible construir coordenadas (Canónicas) que transformen la ecuación en separable, o identificar un factor integrante que transforme la ecuación en una exacta. El encontrar dichas coordenadas implica resolver un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en dos variables, el cual puede ser abordado desde el método de las características o mediante el uso de ayudas computacionales.

Por otra parte, el método del factor integrante de LIE se fundamenta en la equivalencia entre la ecuación de invariación de una EDO de primer orden y la ecuación para la búsqueda de factores integrantes que se aborda normalmente en los cursos de EDOs de pregrado. De acuerdo a esta equivalencia, si existen generadores infinitesimales ξ y η que satisfagan la ecuación de invariación, la ecuación de búsqueda de factores integrantes queda también satisfecha tomando como factor integrante el dado en la ecuación (6).

Lo anterior sugiere que es posible abordar el método de las coordenadas canónicas y el método del factor integrante de LIE en un curso de EDOs de pregrado, con los conocimientos previos observados en los estudiantes a este nivel, teniendo en cuenta que el problema de resolver las EDP que surgen en estos procesos puede llevarse a cabo con ayudas computacionales, sin que esto menoscabe el objetivo principal que es lograr una mejor comprensión del concepto de invariación de las EDOs de primer orden como elemento unificador en la solución de las mismas.
Se observa que el método del factor integrante de LIE puede aplicarse de manera más directa y además se relaciona con conceptos familiares para el estudiante del curso de EDOs, como es el caso del estudio de las ecuaciones no exactas con factores integrantes.

3.2 Metodología Propuesta

La metodología puesta a prueba está fundamentada en la incorporación del método del factor integrante de LIE en los cursos regulares de ecuaciones diferenciales ordinarias a nivel de pregrado. La forma tradicional como se aborda el estudio de las EDO de primer orden implica la identificación de la ecuación que se quiere resolver dentro de un conjunto limitado de familias de ecuaciones, para las cuales se conoce de antemano un procedimiento de solución, así se exploran las ecuaciones separables, lineales, exactas, homogéneas, de Bernoulli, de Ricatti entre otras. Vale decir, que no siempre la ecuación en estudio cae dentro de estas posibilidades.

Para incorporar el método de los grupos de LIE, deben tenerse en cuenta las limitaciones de tiempo para adicionar un nuevo tema dentro del curso. Por lo anterior se sugiere proceder de la forma acostumbrada hasta el tema de solución de ecuaciones diferenciales exactas. En este punto se estudian las ecuaciones restantes junto con los artificios de solución correspondiente los cuales deben ser profundizados por los estudiantes en el tiempo de trabajo dirigido. Lo anterior bajo un estricto seguimiento del docente; posteriormente se discuten los lineamientos teóricos básicos sobre la Teoría de LIE.

El tema debe tratarse mediante ejemplos sencillos que ilustran la invariación bajo cambios de coordenadas de algunas ecuaciones diferenciales, en concreto: las lineales, homogéneas y de Bernoulli. Se debe llevar al estudiante a la conclusión de que para todas ellas, de solución conocida, el elemento común es la invariación. Seguidamente se muestra al estudiante que la condición para que una ecuación sea invariante, se traduce en una ecuación diferencial parcial llamada ecuación de invariación, que a su vez es equivalente a la ecuación ya conocida obtenida en la búsqueda de factores integrantes para ecuaciones no exactas.

A modo de ilustración, para la ecuación lineal, puede plantearse la condición de invariación y mostrarse que ésta es equivalente a la ecuación diferencial parcial que surge en la búsqueda de factores integrantes para esta misma ecuación, tomando el factor integrante dado en (6).

Luego resolver la ecuación de invariación para el caso particular ($\xi=0$), verificando que el factor integrante encontrado por este medio es igual al obtenido anteriormente en el curso. En esta parte la intencionalidad es que el estudiante llegue a la conclusión, de que la existencia de grupos de transformaciones continuas que hagan invariante una EDO de primer orden, implican la existencia de ξ y η que satisfacen la ecuación de invariación; se sigue que también debe existir solución para la ecuación de los factores integrantes, dando cabida y justificación al Teorema del Factor Integrante de LIE.

A continuación se propone al estudiante el siguiente camino de solución al abordar una EDO de primer orden invariante bajo un grupo de simetrías conocido:

- Plantear la ecuación de invariación.

- Verificar que ξ y η, asociados al grupo de simetrías satisfacen la ecuación de invariación.
- Identificar el factor Integrante de LIE.
- Llevar la ecuación a una exacta y resolverla.

El docente debe hacer especial énfasis en que siempre que sea posible resolver la ecuación de invariación para ξ y η, la ecuación diferencial en estudio será invariable bajo un grupo de transformaciones continuas y será posible llevar la ecuación a una exacta. También deberá aclararse que aún si la EDO de primer orden en estudio es invariable, puede darse el caso en que no puedan explicitarse las soluciones de la ecuación de invariación. También debe hacerse notar al estudiante, que el valor del método, consiste en la posibilidad de una mejor comprensión del estudio de la solución de las ecuaciones diferenciales desde una mirada unificadora.

El paso 2 de la lista anterior se aborda mediante tablas previamente elaboradas como se ilustró en el ejemplo 2, ó mediante un software especializado en el tema como se ilustra en los ejemplos 3 y 4. En todo caso será imprescindible un acompañamiento permanente al estudiante durante el proceso, mediado por talleres de afianzamiento y práctica que apunten a lograr los objetivos.

3.3 Evaluación

La propuesta investigativa para la evaluación de esta metodología fue de tipo descriptivo-cualitativo. Hasta donde los autores tienen conocimiento no se ha reportado en la literatura un acercamiento semejante al problema que se propone y en este sentido no es viable una comparación con otras metodologías. Para la evaluación se diseñaron dos instrumentos que dan razón del desempeño de los estudiantes. En cuanto a los objetivos, el estudiante estará en capacidad de:

1. Reconocer la existencia del método de los grupos de LIE como un método unificador en la solución de EDO's de primer orden.
2. Definir los conceptos de invariación y simetría de EDO's y reconocer su formulación matemática.
3. Reconocer y plantear la ecuación de invariación infinitesimal.
4. Identificar las ecuaciones: lineales, homogéneas, de Bernoulli, no exactas con factores integrantes en x ó y entre otras como EDO's invariantes bajo simetrías.

5. Identificar la invariación de EDO's de primer orden bajo grupos de simetrías como una condición suficiente para su solución en términos de cuadraturas.
6. Relacionar el método del factor integrante de LIE con el método de las ecuaciones diferenciales no exactas con factores integrantes.
7. Aplicar el método del factor integrante de LIE en la solución de EDO's de primer orden.
8. Relacionar la condición de invariación infinitesimal con la existencia de factores integrantes y grupos de simetrías.
9. Argumentar sobre las ventajas y desventajas de método del factor integrante de LIE.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Para la implementación de la metodología propuesta se tomaron dos cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, uno en jornada diurna y otro en jornada nocturna. Ambos grupos estaban constituidos por estudiantes de ingenierías (Sistemas, Electrónica, Biomédica, Mecánica, e Industrial) que previamente habían cursado cálculo diferencial e integral y que simultáneamente estaban cursando Cálculo Vectorial o ya lo habían aprobado. El número de estudiantes en estos cursos fue de 25 y 30 respectivamente y se desarrollaron durante los semestres I y II de 2008.

No hubo selección previa de los estudiantes que tomaron estos cursos, es decir estaban dentro de los estándares normales que habitualmente se dan para esta clase de cursos, esto es, los estudiantes que muestran excelencia académica son en general muy pocos y el grueso de los grupos corresponde a estudiantes que presentan las dificultades propias para este nivel de formación, lo cual no excluye problemas en procesos algebraicos entre otros.

Los grupos de prueba se programaron en semestres consecutivos con el fin de identificar estrategias que permitieran tanto una mejor implementación de la metodología como la posibilidad de mejorar los instrumentos de evaluación después de ser puestos a prueba.

El tema fue incorporado al curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en tres sesiones: la primera sesión se dedicó a la introducción de los conceptos teóricos propios del tema; en la segunda se realizaron ejercicios de afianzamiento e interiorización de los contenidos expuestos y se solicitó a los estudiantes desarrollar un taller especialmente diseñado para este propósito que debían desarrollar con el acompañamiento permanente del profesor y en la tercera sesión se evaluó de nuevo el proceso.

Después de un análisis exhaustivo de la respuesta de los estudiantes a los dos instrumentos de evaluación, fue posible identificar algunas tendencias y plantear explicaciones y sugerencias a partir de las mismas. Aunque el presente trabajo no es de tipo cuantitativo, se presentan algunos porcentajes que deben ser considerados como un complemento de la información obtenida y no como indicadores de validación de la metodología misma. En este sentido, es la interacción constante entre el docente investigador y los estudiantes durante el proceso, lo que permite llegar a las inferencias y conclusiones variadas.

Se encontró que al aplicar la metodología propuesta el 60% de los estudiantes alcanzó el objetivo 6. Posiblemente esto se presenta debido a las características mismas de las ecuaciones antes mencionadas que son en derivadas parciales y lejos de todo elemento concreto de su cotidianidad, lo cual hace que al estudiante se le dificulta establecer las relaciones correspondientes.

Se encuentra que solo un 17% de los estudiantes alcanzó el objetivo 4. Consideramos que este bajo porcentaje se debe a las dificultades ya observadas, que tienen los estudiantes para clasificar las EDO`s de primer orden, porque deben llevarlas a formas estándar para su identificación, lo cual requiere operaciones algebraicas en las cuales se observan aún muchas falencias. Sin embargo para aquellos que lograron hacer la clasificación de las EDO`s, la asociación con el concepto de invariación fue inmediata.

El 78% de los estudiantes logró alcanzar los objetivos 2, 3, 5 y 8 que son de carácter cognitivo y apuntan al entendimiento de la esencia del método.

Alrededor de un 60% de los estudiantes alcanzó el cumplimiento de los objetivos 1 y 9. Se hacen evidentes las dificultades que presentan los estudiantes para argumentar y discutir sobre un tema en particular. Si bien reconocen el tema de los grupos de LIE como un método unificador en la solución de EDO´s y aprecian sus ventajas y desventajas, a la hora de expresarlo en forma escrita, se aprecian limitaciones en sus habilidades comunicativas, lo cual es un problema generalizado en nuestros estudiantes frente a cualquier tipo de pregunta argumentativa.

Aproximadamente un 80% de los estudiantes logró el objetivo 7, es decir, aplican el método y resuelven ecuaciones diferenciales invariantes bajo grupos de simetrías.

5. CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados obtenidos se evidencia que, en general, los estudiantes expuestos a la metodología propuesta logran los objetivos planteados de manera satisfactoria.

Dichos resultados permiten concluir que la metodología evaluada, si bien es susceptible de ser mejorada, muestra ser adecuada para abordar la teoría de la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el método de los grupos de LIE a nivel de pregrado en programas de ingeniería.

Algunas de las dificultades observadas en los estudiantes a la hora de abordar el tema, se debe en parte a las características mismas de la ecuación de invariación ya que está planteada en términos de derivadas parciales, un tema que no es prerrequisito para los estudiantes del curso de EDOs y que se aborda de una manera introductoria para el tema de las ecuaciones diferenciales exactas.

Para una mejor comprensión de esta temática es necesario que el estudiante haya alcanzado un nivel adecuado de pensamiento abstracto ya que se requiere hacer relaciones entre elementos no concretos que se encuentran lejos de la cotidianidad del estudiante.

Esto se hace evidente en la facilidad con que cumplen los objetivos procedimentales y las dificultades que presentan para establecer relaciones que requieran de más análisis.

Para aplicar el método propuesto es necesario que los estudiantes realicen operaciones algebraicas simples para llevar las ecuaciones, siempre que sea posible, a formas estándar que les permita identificarlas como invariantes bajo un grupo de simetría conocido. Tales habilidades algebraicas que se supone ya deben tener a esta altura de su formación no están del todo desarrolladas, siendo un impedimento para un mejor desempeño en este tipo de problemas. En este punto el trabajo colaborativo resultó ser una estrategia útil que permitió a los estudiantes menos aventajados alcanzar una mejor comprensión del tema.

Así mismo se evidencian algunas dificultades en los estudiantes para argumentar y discutir sobre un tema en particular. Si bien reconocen el tema de los grupos de LIE como un método unificador en la solución de EDO´s y aprecian sus ventajas y desventajas a la hora de expresarlo en forma escrita, se aprecian limitaciones en sus habilidades comunicativas, lo que es un problema generalizado en nuestros estudiantes frente a preguntas argumentativas.

BIBLIOGRAFÍA

- Bluman, G. and Kumel, S. (1989). ***Symmetries and Differential Equations.*** (2 ed.) New York: Springer Verlag.

- Campos, A. (1995). *I**niciación en el Análisis de Ecuaciones Diferenciales mediante Grupos de LIE. Colombia:*** Prepublicación. Universidad Nacional de Colombia.

- Emanuel,G. (2001). ***Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups.*** United States: Chapman and Hall/Crc.

- Hereman, W. (1997). ***"Review of Symbolic Software for LIE Symmetrie Analysis. Algorithms and Software for Symbolic Analysis of Nonlinear Systems"***. Mathematical and Computer Modelling. Vol. 25, num 8, pp. 115-132.

- Olver, P. J. (1993). ***Application of LIE Groups to Differential Equations***. (2 ed.)New York: Springer Verlag.