Entre Ciencia e Ingeniería, ISSN 1909-8367
Año 4. No. 9 – Segundo semestre de 2010, páginas 18 - 32

El Cabri y El Pensamiento Geométrico en Contextos Escolares, Transformaciones Geométricas

Cabri and Geometric Thinking in Scholastic Contexts, Geometric Transformations

Egidio Esteban Clavijo Gañan
Licenciado En Matemáticas
Especialista En Computación Para La Docencia
Maestría En La Enseñanza De La Matemática
Docente Universidad Pontificia Bolivariana
Grupo de Investigación en Matemáticas - Gmat
egidio.clavijo@upb.edu.co; estebanclavijo@une.net.co

Elmer José Ramírez Machado
Licenciado En Matemáticas
Maestría En Educación
Docente Universidad Pontificia Bolivariana
Grupo de Investigación en Matemáticas - Gmat
elmer.ramirez@upb.edu.co

Recibido Agosto 25 de 2010 – Aceptado Junio 15 de 2011

RESUMEN

El desarrollo de la geometría dinámica ha necesitado cambios radicales en la enseñanza de la demostración. Tradicionalmente, el enfoque de la geometría consistía en crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas y luego motivar la necesidad de una demostración deductiva.

En Geometría Dinámica existen diversos tipos de software diseñados con la intención específica de poner a disposición de los estudiantes un ambiente tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana. En contraste, *la geometría dinámica es precisa y realizar construcciones complejas para luego modificarlas es muy fácil y rápido.*

El principal objetivo es buscar alternativas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y por consiguiente los profesores estarán en capacidad de diseñar, organizar e implementar actividades en las que utilicen software de geometría dinámica formando comunidades de aprendizaje que contribuyan a preparar la comprensión y el uso auténtico de esta tecnología.

La propuesta consiste en analizar los progresos del pensamiento geométrico de los estudiantes partiendo de temas concernientes a las transformaciones geométricas, recorriendo desde los conceptos básicos hasta retomar longitudes, áreas y volúmenes de objetos de la geometría euclidiana, garantizando que los estudiantes dispondrán de un mínimo conjunto de conceptos, propiedades, algoritmos y métodos de resolución de problemas que son comunes a contenidos matemáticos estudiados a lo largo de todos los cursos, tales como construcción de representaciones planas en trigonometría, geometría analítica, álgebra y cálculo, entre otras.

Palabras clave: Geometría Dinámica, resolución de problemas, transformaciones.

ABSTRACT

The development of dynamic geometry has needed radical changes in the demonstration teaching. Traditional geometry approach created doubts in the students mind about the validity of their empirical observations, and then it motivated them for a deductive demonstration.

There are different types of software in Dynamic Geometry, which have been designed in order to give students an atmosphere in a micro world style for the experimental exploration of flat geometry. In contrast, dynamic geometry is precise, so performing complex construction and then modifying is easy and fast.

The main objective is proposing alternatives in geometry learning and teaching, and therefore teachers will be able to design, organize and implement activities with a dynamic geometry software support. Consequently they will form learning communities which contribute to prepare the understanding and the authentic use of this technology.

This paper aims to analyze the progress of students' geometric thinking by starting from the geometric transformations, covering basic concepts up to retake the lengths, areas and volumes of the objects of Euclidian geometry. It ensures that the students will have a set of concepts, properties, algorithms and methods for problem solving, which are common to a great number of mathematical subjects studied throughout all the courses, such as construction of flat representations in trigonometry, analytical geometry, algebra, and calculation, among others.

Key words: Dynamic Geometry, resolution of problems, transformations.

INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años el avance que ha experimentado el mundo a través del desarrollo de la tecnología ha revolucionado en muchos aspectos la sociedad, uno de ellos, es la forma de organización de ideas y en consecuencia, el modo de aprender. El desarrollo de software de geometría dinámica se ha constituido en una forma diferente de construir el pensamiento geométrico desde los primeros años de la escuela hasta los cursos universitarios de geometría.

El uso de la tecnología al interior de las aulas de clase ha generado cambios sustanciales en la forma como nuestros estudiantes aprenden matemáticas, cada uno de los ambientes computacionales facilita las condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas.

Es posible afirmar que uno de los principales problemas que tienen los estudiantes en su bajo desempeño podría ser explicado con la teoría de Van Hiele (Gutiérrez, 1990). La visualización es un prerrequisito indispensable para alcanzar buenos niveles en geometría, el estudio de ésta debe ser gradual y sistemático sin apresurarnos a formalizar conceptos desde temprana edad.

A raíz de esta problemática y las consecuentes investigaciones sobre didáctica, desde los años noventas se han aumentado las reformas curriculares y en todas ellas se evidencia un renovado interés por la geometría, su enseñanza y el rol que tiene en el aprendizaje de las matemáticas.

Generalmente en cursos superiores a nivel universitario, la geometría es enseñada con un enfoque axiomático y excesivamente formal en los objetivos propuestos y los requerimientos solicitados a los estudiantes. Estos programas tienden a lograr que ellos realicen demostraciones formales y que adquieran un pensamiento deductivo, dejando de lado actividades de diseño, exploración, modelización, conjeturación, definición, argumentación y demostración: acciones importantísimas para la inducción de descubrimientos.

Probablemente muchos profesores en el pasado y algunos en el presente evitaban o evitan la exploración en forma de relaciones geométricas por construcción y medición con lápiz y papel debido a que se invierte mucho tiempo y estas construcciones no son del todo exactas. De ahí que se puedan encontrar profesores extremadamente formalistas descalificando cualquier forma de trabajo experimental de la matemática.

Félix Klein (1872) (Citado por Battista, 1995) descubre en el concepto de grupo, una idea unificadora y lo desarrolla en geometría; la geometría euclidiana consiste en el estudio de las figuras del plano, incluidas las áreas y longitudes que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones que se genera por las traslaciones y rotaciones en el plano llamadas transformaciones rígidas o movimientos.

También Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele, (Gutiérrez, 1998) exponen en sus tesis doctorales, un modelo que explica al mismo tiempo como se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y como ayudarlos a mejorar la calidad de su razonamiento.

Van Hiele, (Gutiérrez, 1990) estratifica el conocimiento en cinco niveles y dentro de cada nivel, una serie de fases que permiten analizar el aprendizaje de la geometría. El aprendizaje es comparado con un proceso inductivo. En un nivel n -1 pueden ser estudiadas ciertas cuestiones limitadas de los objetos geométricos. En el nivel n se suponen obtenidos los conocimientos del nivel n -1 y se explicitan las relaciones que estaban implícitas en el nivel anterior, aumentando así el grado de comprensión del concepto.

A los niveles se les denomina de la siguiente manera:

Nivel 0: Básico, reconocimiento o visualización. En este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, sin diferenciar sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares.

Ejemplo: identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.

Nivel 1: Análisis. Se perciben características de los objetos geométricos: pueden describir objetos a través de sus propiedades, pero éstas no logran ser relacionadas unas con otras.

Ejemplo: un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales

Nivel 2: Deducción informal u orden. Describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen cómo algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias.

Los estudiantes siguen demostraciones, aunque no las entienden como un todo porque su razonamiento lógico los induce sólo a continuar pasos individuales.

Ejemplo: en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

Nivel 3: Deducción. Realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática, se comprenden las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Van Hiele llama a este nivel la esencia de la matemática.

Ejemplo: demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

Nivel 4: Rigor. Geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar.

Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido.

En el modelo Van Hiele, el aprendizaje de la geometría se hace pasando siempre por cada uno de los niveles de pensamiento y conocimiento que no van asociados a la edad, sino al logro de un nivel superior una vez se ha concretado el anterior. Además es válido que cualquier persona frente a un nuevo aprendizaje en geometría, pase por todos esos niveles y su mayor o menor dominio de la geometría, influirá en que lo haga más o menos rápidamente.

Van Hiele concreta que “alcanzar un nivel superior de pensamiento significa que una vez la persona haya adquirido un nuevo orden de pensamiento es capaz de aplicar determinadas operaciones en nuevos objetos.”.

La característica más significativa de la geometría dinámica es su potencial para estimular la experimentación, y este tipo de investigación orientada a los estudiantes los introduce tempranamente a proponer problemas con las suficientes oportunidades para explorar, conjeturar, refutar, reformular y explicar. El software de geometría dinámica estimula este pensamiento, porque no sólo es un medio para verificar conjeturas verdaderas, sino que también es útil para construir contraejemplos de conjeturas falsas.

El desarrollo de la geometría dinámica ha necesitado cambios radicales en la enseñanza de la demostración. Tradicionalmente, el enfoque de la geometría consistía en crear dudas en la mente de los estudiantes acerca de la validez de sus observaciones empíricas y luego motivar la necesidad de una demostración deductiva. En la experiencia, esas estrategias para generar duda y luego crear la necesidad de una demostración simplemente no funcionan cuando las conjeturas geométricas se investigan a fondo a través de su variación continúa con un software dinámico como Cabri Geometry.

Cuando los estudiantes son capaces de producir numerosas configuraciones correspondientes de manera fácil y rápida, entonces tienen la necesidad de una verificación o comprobación. Aunque puedan demostrar que no necesitan convencerse en esas situaciones, es relativamente sencillo provocar una mayor curiosidad preguntándoles porqué piensan que un resultado particular es verdadero, desafiándolos a tratarlo y explicarlo. Los estudiantes admiten prontamente que la verificación inductiva sólo confirma, no da un sentido satisfactorio de demostración o comprensión de cómo eso es una consecuencia de otros resultados familiares; así que aceptan ver la argumentación deductiva más como un intento de explicación que de verificación.

CABRI GEOMETRY es un programa de geometría dinámica diseñado con la intención específica de poner a disposición de los estudiantes un ambiente del tipo micro mundo para la exploración experimental de la geometría plana. En el pasado había que dibujar las configuraciones geométricas en una hoja de papel, obteniendo así una representación más o menos exacta pero fija y por lo tanto limitada en su exploración. En estos programas las figuras geométricas pueden construirse por medio de acciones y en un lenguaje muy próximo al que se usa en el universo familiar de papel y lápiz. En contraste, la geometría dinámica es precisa y realizar construcciones complejas para luego modificarlas es muy fácil y rápido.

Una vez creadas estas figuras pueden re - dibujarse “arrastrando” sus elementos básicos directamente en la pantalla y moviéndolos mientras se mantienen las propiedades que se les han dado explícitamente. Así, continuamente puede cambiar un triángulo y comprobar que sus alturas siempre se cortan en un solo punto durante la transformación. Por lo tanto el software permite repetir experimentos en posiciones diferentes y verificar cuáles propiedades geométricas permanecen invariantes. De hecho, Cabri tiene una herramienta para constatar si algunas propiedades (paralelismo, concurrencia, colinealidad, perpendicularidad, etc.) son verdaderas en general y si no lo son, el programa construye contraejemplos.

Entonces los maestros de hoy debemos concientizarnos de que las figuras construidas con papel y lápiz son estáticas y toda vez que se quiera observar como éstas pueden cambiar hay que redibujarlas.

Uno de los axiomas mejor asentados de las actuales teorías cognitivas del aprendizaje se refiere a la naturaleza activa del mismo, afirmando que la amplia memorización sólo lleva a acumular materia inerte, en otras palabras, el aprendizaje no puede ser transmitido, sino que debe ser construido individualmente (Vizcarro y León, 1997). De este modo se insiste en que el alumno realice actividades interesantes dentro de un contexto significativo.

La abstracción y la transferencia, condiciones centrales de un aprendizaje eficaz, sólo es posible cuando un alumno ha experimentado la aplicación de sus conocimientos en una actividad plena de sentido y en contextos muy variados que faciliten su generalización (Vizcarro y León, 1997).

Es por ello que nos centraremos en la importancia que tiene el proceso de visualización y representación para la formación de estudiantes en el área de geometría, las cuales son utilizadas como herramientas de estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que ellos mismos las inventan, formulan y resuelven, lo cual es clave para el desarrollo del pensamiento matemático espacial.

Considerando estos procesos como aspectos que permiten un conocimiento pleno sobre la geometría, se pretende que el estudiante logre interpretar o deducir los caracteres que conforman esas representaciones y así adquirir nuevos conocimientos a partir del análisis que hagan.

El pensamiento espacial, entendido como "el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos (MEN, 1998).

Las traslaciones es un tema dirigido a los estudiantes de grado 6º y 7º con el propósito de enseñarles las distintas transformaciones que puede sufrir una figura guardando sus propiedades y tamaño. Es a través de las TIC y CABRI GEOMETRY como método de enseñanza de la geometría transformacional donde se dan a conocer las características que la identifican, los distintos casos donde se presentan y la manera como es aplicada.

Los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentidos, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas.
Podemos decir que los ambientes de geometría dinámica se apoyan en el desarrollo de una dimensión didáctica que incorpora la reflexión respecto a la formación del pensamiento geométrico, estos ambientes son útiles para desarrollar razonamientos y elementos de orden cognitivo como la visualización y la representación, importantes para construir bien una figura geométrica y para desarrollar habilidades de pensamiento espacial que les permitirá cuestionar e imaginar las figuras antes de construirlas.

Se infiere que a partir de este pensamiento espacial se deriva el reconocimiento efectuado en los desarrollos investigativos en la didáctica de las matemáticas por quienes hacen referencia a la distancia entre los ambientes de aprendizaje usuales y los ambientes que integran las TIC para exponerlas en las clases y hacerlas evolucionar a partir de la determinación de niveles de mejoramiento y eficacia, logrando con esto que los profesores comprendan la utilidad de los nuevos recursos pedagógicos y enfatizando como los alumnos pueden justificar sus propias ideas y lograr de esta forma interpretar la construcción de figuras y sus propiedades.

Pasos para la construcción de una estrella con un cuadrado inscrito y su traslación (en el programa Cabri II Plus):

1. Se realiza un cuadrado teniendo en cuenta sus propiedades.

2. Luego hallamos los puntos medios de cada uno de los segmentos que conforman el cuadrado (EG, GH, HF, FE) y trazamos perpendiculares que pasen por cada uno de los puntos hallados respecto a cada uno de los lados. (Figura 1)

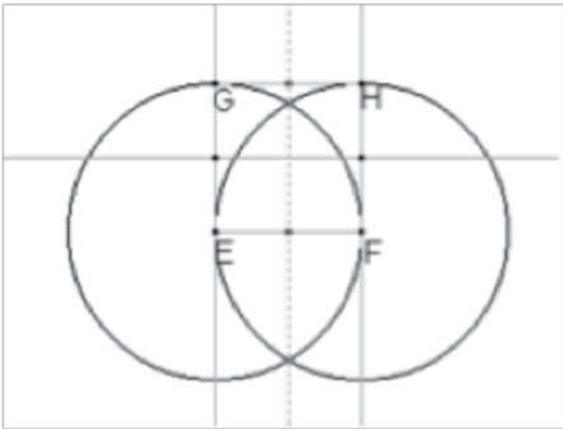

Figura 1

3. Luego, donde se interceptan las perpendiculares con los círculos ubicamos puntos de intercepción (A, D, C), y comenzaremos a construir la estrella uniendo los puntos con segmentos (HC, CF, FD, DE, EA, AG).

A continuación, trazamos dos círculos de G a H y de H a G

Ahora pasamos a interceptar los dos círculos con la perpendicular, a este punto lo llamaremos B. (Figura 2)

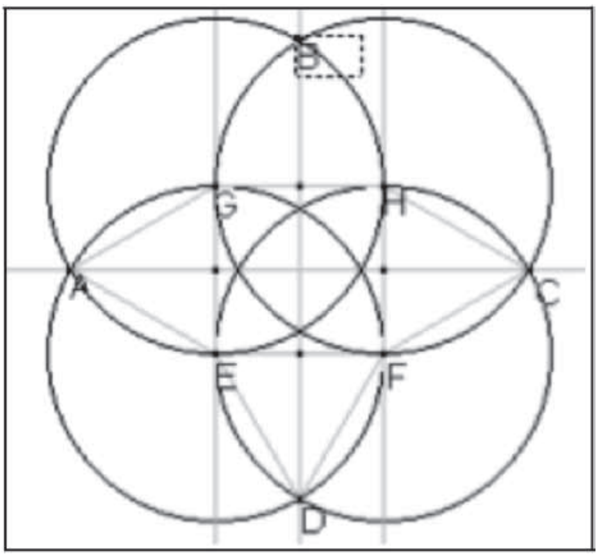

Figura 2

Seguidamente unimos los puntos GB, BH con segmentos, los cuales nos permiten hallar nuestra figura; luego con la opción polígono se superpone sobre la figura de la estrella y otro sobre el cuadrado y así obtenemos la figura de la estrella con un cuadrado inscrito (Figura 3)

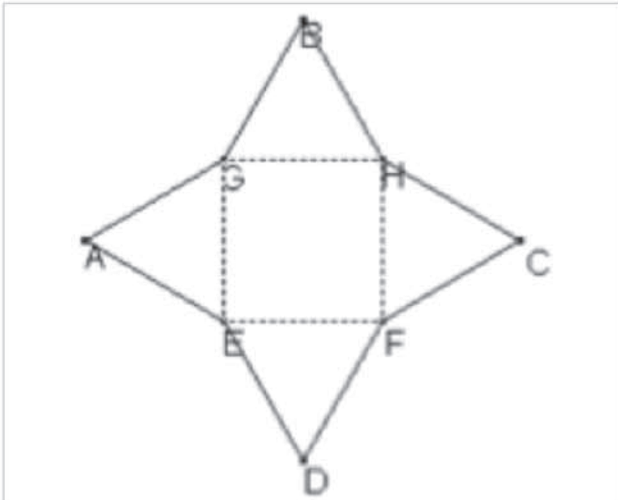

Figura 3

Finalmente se traza un vector que nos va a permitir realizar la traslación de la figura, entonces dando clic sobre la figura y luego sobre el vector obtenemos nuestra transformación (Figura 4)

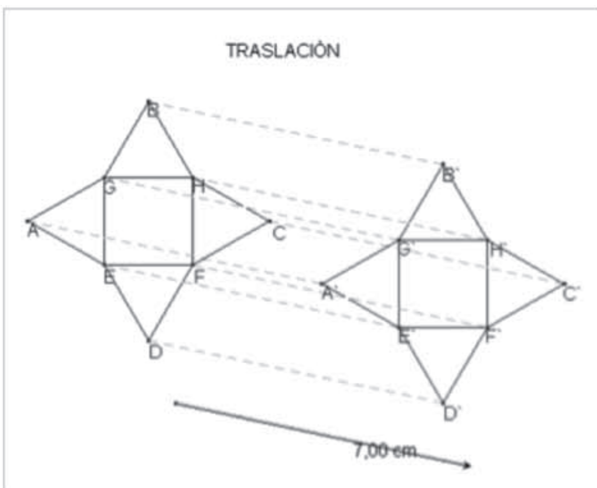

Figura 4

PREGUNTAS:

¿La distancia que existe entre AA' es igual a la longitud del vector? Justifica tu respuesta.

¿La figura trasladada es igual o guarda las mismas propiedades de la figura inicial? Justifica tu respuesta.

RESULTADOS

Dado que la propuesta apenas se está implementando, los resultados aún no se han obtenido.

CONCLUSIONES

Este tipo de trabajo genera un impacto metodológico en la enseñanza y aprendizaje de la geometría; la utilización de sistemas con gráficos dinámicos nos llevan a nuevos métodos en el aprendizaje de geometría plana, especialmente en resolución de problemas geométricos, adquisición inductiva de teoremas geométricos y formación de conceptos, aplicación e investigación de transformaciones, investigación de relaciones funcionales de figuras geométricas, simulación de movimiento.

El aprendizaje constructivista en el que se inserta el uso de un sistema de geometría dinámica es viable si cambia el rol del profesor tradicional, director de clase y dispensador de información, hacia el rol de co-partícipe, apoyo, co-aprendiz, facilitador y asesor en el progreso de sus alumnos.

Se han identificado algunos factores que aparecen al usar un sistema de geometría dinámica para la enseñanza de la geometría, algunos de los cuales son compartidos por otros métodos de enseñanza. Cada uno de dichos factores condiciona el aprendizaje y en consecuencia la gestión de la clase por parte del profesor. Su actuación en el aula cuenta así con unas pautas generales en las que apoyarse, sugerir contraejemplos ante decisiones erróneas, animar al progreso, fomentar la autonomía del alumno, enmarcar las decisiones particulares en un ámbito geométrico global, institucionalizar y descontextualizar, son las directrices que se concretarán en cada actividad propuesta y en cada grupo particular de alumnos.

BIBLIOGRAFÍA

- Bartolomé, A. (1999). ***Nuevas tecnologías en el aula***. Barcelona: Ediciones Graó.

- Battista, M., y Clements, D. (1995). ***Geometry and Prof. The Mathematics Teacher***. Vol. 88 Nº 1. Enero 1995.

- Botero, Maria Margarita; Arteaga, Jose Ricardo; ***La Geometría con Cabri, un programa de capacitación de maestros***. REVISTA TEXTO Y CONTEXTO. (1999) , Vol. 37

- Cid, E. y Muñoz, M. (2003). ***Matemática primero medio, texto del estudiante***. Santiago: Arrayan ediciones S.A.

- De Villiers, M. (1999). ***The Future of Secondary School Geometry. La lettre de la preuve***, University of South Africa (UNISA), Pretoria, South Africa. Novembre-Déciembre. 1999.

- Gallego, R. (1998). ***Discurso constructivista sobre las tecnologías***. Santafé de Bogotá: Editorial Magisterio.

- Gutiérrez, A. Jaime, (1990) ***Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele,*** Práctica en Educación Matemática: Capítulo 6o, pág. 295-384. Ediciones Alfar, Sevilla.

- Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1998). ***Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática***. Bogotá: Una empresa docente.

- Ministerio de Educación (1998). ***Matemática. Programa de Estudio Primer Año Medio***. Santiago: Mineduc.

- Ministerio de Educación Nacional. (1998) ***Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.*** MEN. Bogotá, pág. 61

- Salomón, C. (1987). ***Entornos de aprendizaje con ordenadores.*** Barcelona: Editorial Paidós.

- Spiegel, A. (1997). ***La escuela y la computadora***. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

- Vergara, C. y otros (2000). ***Matemática I educación media.*** Santiago: Editorial Santillana.

- Vizcarro, C. y León, J. (1997). ***Nuevas tecnologías para el aprendizaje.*** Madrid: Ediciones Pirámide.