

Evaluación mediante técnicas multivariadas de los resultados de intervenciones de aula en la enseñanza de la estadística

Evaluation of classroom interventions results through multivariate techniques when teaching statistics

J. J. Vargas, O. Valencia y J. D. Gallo

Octubre 7 de 2013 - Aceptado Junio 6 de 2014

Resumen—La estadística es una asignatura que presenta dificultad para llevarla a un nivel de entendimiento práctico. Se emplea en modelación de fenómenos aleatorios y es indispensable en investigaciones que involucran incertidumbre. La estadística que orienta el Departamento de Física y Matemáticas (Universidad Autónoma Manizales -UAM) busca mejorar en los estudiantes de ingeniería, el pensamiento estocástico y la comprensión de leyes probabilísticas incorporando tecnologías informáticas.

En la investigación se adoptó un instrumento de ideas previas (IIP) con dos fines, primero visualizar preconceptos estocásticos y segundo desarrollar unidades didácticas (UD) para enseñanza de estadística. Este IIP se aplicó a tres grupos de estadística al inicio y al final del semestre II-2011 haciendo intervención de aula mediante UD diseñadas. Para contrastar resultados obtenidos se usó IIP en tres cursos del I-2012 sin emplear UD. Con dichos resultados se realizaron comparación de proporciones

multinomiales, MANOVA y pruebas de asociación para analizar el impacto de la intervención.

Palabras clave - análisis estadístico (statistical analysis), análisis de varianza (*analysis of variance*), tecnología en educación (educational technology).

Abstract - Statistics is a subject that presents difficulties when taking it to a level of practical understanding. It is used in modeling random phenomena and is indispensable in investigations involving uncertainty. The statistic that guides the Department of Physics and Mathematics (Universidad de Manizales -UAM) seeks the improvement in engineering students, of stochastic thinking and understanding of probabilistic laws incorporating information technologies.

A research instrument of previous ideas (IIP) was adopted for two purposes, first of all visualize stochastic preconceptions and then, develop teaching units (DU) for teaching statistics. The three groups of IIP statistics was applied at the beginning and end of the semester II 2011 doing classroom intervention designed by UD. To compare results obtained, IIP was used in three courses of I-2012 without using UD. With these results compare multinomial proportions, MANOVA and association tests were performed in order to analyze the impact of the intervention.

Key Words - statistical analysis, *analysis of variance*, educational technology.

¹ Producto derivado del proyecto de Investigación “Propuesta metodológica para la enseñanza de la estadística haciendo uso de la lúdica y la incorporación de la tecnología en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Manizales”, apoyado por el Departamento de Física y Matemáticas, Universidad Autónoma de Manizales a través del grupo de investigación en Física y Matemáticas con énfasis en la formación de Ingenieros.

J. J. Vargas, O. Valencia y J. D. Gallo imparten docencia en el Departamento de Física y Matemáticas de la Universidad Autónoma de Manizales (correos e.: jairo@autonoma.edu.co, orlandovr@autonoma.edu.co, daga@autonoma.edu.co).

INTRODUCCIÓN

LA ESTADÍSTICA es una ciencia que amerita la revisión tanto de su enseñanza como de su aprendizaje. Preparar a los estudiantes para mejorar la comprensión de los conceptos teóricos de la estadística con miras a que puedan emplearlos en forma acertada para la comprensión y solución de situaciones problemáticas de su vida profesional, es una tarea que recae sobre los docentes de estadística. Como lo afirma Batanero en [1] “*ha habido un aumento notable del uso de ideas estadísticas en diferentes disciplinas, que se observa en las revistas científicas y en la creciente implicación de los estadísticos en los equipos de trabajo interdisciplinario*”.

Así mismo Cox en [2] hace notar las dificultades en el entendimiento de la estadística y la insuficiente apreciación del rol de la estadística por parte de investigadores importantes.

Gómez en [3] establece que: “*La enseñanza de la estadística se puede abordar desde múltiples perspectivas distintas a la realización de ejercicios de resolución corta*”.

Por lo tanto, se hace necesario abordar otras estrategias para enseñar la estadística. No se puede seguir tratando la enseñanza de esta ciencia como un simple recetario que se emplea en la solución de ciertos ejercicios puntuales.

Se ha reportado el empleo de diversas estrategias de enseñanza de la estadística como: la definición de casos prácticos que atraigan la atención de los estudiantes y a partir de ellos sacar las ideas y los conceptos que se quieran transmitir [4]; la realización de experimentos prácticos en estadística así como el uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico [5]. En esa búsqueda de nuevas estrategias de enseñanza se ha decidido usar la incorporación de nuevas tecnologías en la enseñanza de la estadística en la Facultad de Ingeniería de la UAM, fundamentada en el MCRMAT² [6], desarrollado en el Departamento de Física y Matemática de la UAM en su grupo de investigación.

Los métodos multivariados suelen ser muy potentes para analizar los resultados propios de las investigaciones en todas las áreas y pasar así del análisis puramente descriptivo. Al mezclarlos con otras técnicas, se logran comparaciones efectivas entre varias poblaciones. El objetivo de este trabajo es analizar los resultados de intervenciones de aula en la enseñanza de la estadística en la UAM empleando algunas de las técnicas antes mencionadas.

El presente artículo está estructurado así: En la parte II se presentan los conceptos estadísticos necesarios para evaluar las intervenciones de aula. En la parte III se describe la metodología que explica el IIP y las muestras seleccionadas. En la parte IV se presentan las comparaciones estadísticas, Manova (con verificación de supuesto de homocedasticidad),

comparación de vectores y pruebas de asociación. En la parte V se hace un análisis similar al IV, pero para 3 grupos del I-2012 a los cuales no se intervino con UD. En la parte VI se presentan las conclusiones.

I. CONCEPTOS MULTIVARIADOS

A. Comparación de medias multivariadas

1) Modelo de una vía de clasificación

En la referencia [7]: *Considérese que Y_{ij} es una observación de una población $N_p(\mu_i, \Sigma)$ con $i = 1, \dots, n_i$ y $j = 1, \dots, q$.* La estructura de los datos se puede visualizar en la Tabla I.

La media \bar{Y}_i en cada muestra se obtiene mediante

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{n_i} Y_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, q \quad (1)$$

La media general \bar{Y}_- se obtiene de

$$\bar{Y}_- = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \bar{Y}_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, q \quad (2)$$

Con $N = \sum_{i=1}^q n_i$, el número de observaciones. El modelo que relaciona las observaciones con los parámetros μ_i es de la forma

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \text{ con } \varepsilon_{ij} \sim N_p(\mathbf{0}, \Sigma) \text{ para } i = 1, \dots, n_i \text{ y } j = 1, \dots, q.$$

La hipótesis a verificar es

$$H_0: \mu_1 = \dots = \mu_q \quad (4)$$

TABLA I

ESTRUCTURA DE UNA POBLACIÓN MULTIVARIADA PARA MODELO DE UNA SOLA VÍA

Población	Muestra	Media Muestral
Población 1	$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}$	\bar{Y}_1
Población 2	$Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2n_2}$	\bar{Y}_2
Población q	$Y_{q1}, Y_{q2}, \dots, Y_{qn_q}$	\bar{Y}_q

La región de rechazo a un nivel de significancia α , para contrastar la hipótesis (4), está dada por (5), la cual se conoce como Lambda de Wilks, la referencia [7] muestra que

$$\Lambda = \frac{|E|}{|E + H|} = \frac{|N\hat{\Sigma}|}{|N\hat{\Sigma}_\omega|} < \Lambda_{(\alpha, p, vH, vE)} \quad (5)$$

Donde $vH = q - 1$, son los grados de libertad para la hipótesis, $vE = N - q$ son los grados de libertad del error ($N = \sum_{i=1}^q n_i$).

Las matrices $\hat{\Sigma}$ y $\hat{\Sigma}_\omega$ se calculan con (6), (7) y (8).

$$\hat{\Sigma} = \sum_{i,j} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)(Y_{ij} - \bar{Y}_i)' \quad (6)$$

² Modelo Computacional Representacional de la Matemática

$$\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij} \quad (7)$$

$$N\hat{\Sigma}_{\omega} = \sum_{i=1}^q n_i (\bar{Y}_i - Y)(\bar{Y}_i - Y)' + N\hat{\Sigma} \quad (8)$$

Valores pequeños del estadístico Lambda de Wilks causan rechazo de la hipótesis nula. Para la prueba de hipótesis (4) existen otros estadísticos como Pillai [8], la Traza de Lowley Hotelling [9] y la raíz máxima de Roy [10]. Las siguientes ecuaciones muestran los estadísticos anteriormente mencionados:

Traza de Pillai:

$$V = \text{traza}((E + H)^{-1}H) = \sum_{i=1}^s \frac{\lambda_i}{1 + \lambda_i} \quad (9)$$

Traza de Lowley Hotelling (Hotelling, 1931)

$$U = \sum_{i=1}^s \lambda_i \quad (10)$$

Aunque también se puede encontrar otra forma de calcular Lambda de Wilks

$$\Lambda = \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 + \lambda_i} \quad (11)$$

Donde son los valores propios de la matriz

2) Aproximación Lambda de Wilks.

En [11] se dice que “*estos estadísticos tienen su propia distribución de probabilidad, las cuales se han construido con tablas. Sin embargo Wilks sigue la mencionada distribución de Wilks, la cual se puede transformar en una distribución F*”.

$$F = \frac{1 - \sqrt[3]{\Lambda}}{\sqrt[3]{\Lambda}} \frac{GL2}{GL1} \quad (12)$$

Como se ve en [12], Barlett encontró una forma de aproximar el estadístico Lambda de Wilks a una distribución chi cuadrado, pero más adelante, Barlett y Roy encontraron otra manera de aproximar el mismo estadístico pero a una distribución F.

$$t = \begin{cases} \sqrt{\frac{p^2 v_H - 4}{p^2 + v_H - 5}} & \text{si } pv_H \neq 2 \\ 1 & \text{si } pv_H = 2 \end{cases} \quad (13)$$

Donde GL1 y GL2 son los grados de libertad del numerador y del denominador respectivamente y tes:

$$M = \frac{\prod_{i=1}^p |S_i|^{\frac{1}{2}(n_i-1)}}{|S_c|^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^p (n_i-1)}} \quad (14)$$

Con los grados de libertad del modelo, dado por k=número de tratamientos; y p es el número de variables.

3) Prueba de homogeneidad de varianzas.

Con (14) y (15) se comprueba el supuesto de homocedasticidad.

$$S_c = \frac{\sum_{i=1}^p (n_i - 1) S_i}{\sum_{i=1}^p (n_i - 1)} \quad (15)$$

S_i es la matriz de varianzas y covarianzas de la población i (correspondiente a cada grupo i, con $i=1, 2, 3$, en este caso).

S_c es una matriz especial, corresponde a las varianzas combinadas.

Para la prueba M Box, se requiere calcular U, donde:

$$U = -2(1 - D) \ln M \quad (16)$$

la cual se compara con un chi cuadrado de

$$v = \frac{1}{2}(k - 1)p(p + 1) \text{ grados de libertad.}$$

Siendo D definido por la siguiente ecuación:

$$D = \left[\sum_{i=1}^p \frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^p (n_i - 1)} \right] \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p + 1)(k - 1)} \quad (17)$$

B. Análisis categórico. Proporciones multinomiales

La distribución multinomial es una extensión de la distribución binomial, su función de densidad está dada por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_m!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m} \text{ con } \sum_{i=1}^m x_i = n \quad (18)$$

Quesenberry y Hurst en [13] proponen el siguiente intervalo de confianza I.C para proporciones multinomiales:

$$I.C: \frac{\chi^2 + 2n_i}{2(n + \chi^2)} \pm \frac{\sqrt{\chi^2(\chi^2 + 4n_i \frac{n - n_i}{n})}}{2(n + \chi^2)} \quad (19)$$

χ^2 es un ji cuadrado $\chi^2_{k,\alpha}$ con k grados de libertad donde k es el número de categorías menos 1; n_i es la frecuencia observada en la categoría i; n es la sumatoria de todas las observaciones.

II. METODOLOGÍA

La investigación en su totalidad se realizó en tres momentos a saber: exploración de ideas previas, intervención didáctica y construcción de sentidos y significados con el fin de reconocer los avances conceptuales logrados por los estudiantes.

En la fase de intervención didáctica, los docentes investigadores diseñaron e implementaron las unidades didácticas, que contienen la exploración de aspectos metacognitivos que se convierten en la base del proceso evaluativo permanente durante la intervención.

A. Muestra

La investigación se desarrolla con tres grupos en el semestre II-2011, 49 estudiantes al inicio y 48 al final.

B. Instrumento de Ideas previas de referencia

Se tomó como referencia el instrumento desarrollado en [14]. Dicho documento comprende 10 preguntas, las cuales

están clasificadas en una tabla bivariada, Tabla II, de acuerdo al tipo de sesgo y el tipo de contenido estadístico. Los tipos de sesgo se describen a continuación en los apartados 1) y 2).

1) Tipo de sesgo

Se eligieron 4 tipos de sesgo: representatividad, accesibilidad, determinismo y aversión al riesgo. Los dos primeros por la importancia que tienen en el razonamiento probabilístico, en concreto, por el papel que desempeñan en el procesamiento selectivo de la información, es la causa fundamental de sesgos en el razonamiento. Por su parte, el sesgo determinista tiene su origen en la primacía del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilista. Por último, la aversión al riesgo es un sesgo muy estudiado en la teoría de la decisión conductual.

2) Tipo de contenido estadístico

En relación a esta variable los problemas se pueden agrupar en dos clases. La primera clase está compuesta por los problemas cuya solución supone la comprensión y aplicación de un concepto o ley probabilística básica. La segunda clase está compuesta por los problemas cuya solución supone el dominio de las técnicas elementales del cálculo probabilístico.

Al documento empleado en referencia [14] se le hicieron tres ajustes, primero en aspectos de redacción (adaptados a nuestro idioma); segundo se agregaron cinco preguntas adicionales de selección múltiple, conservando la estructura del documento original (Ver Tabla II); tercero se agregaron otras 5 preguntas de tipo pregunta abierta, para un total de 20 preguntas. La calificación o categoría se estableció de la siguiente manera:

Calificación 1. Respuesta no estadística o se deja en blanco.
Calificación 2. Respuesta correcta pero un argumento pobremente estadístico.
Calificación 3. Cuando la respuesta y el argumento corresponden claramente a elementos estadísticos.

TABLA II

CLASIFICACIÓN DE PREGUNTAS SEGÚN LA AVERSIÓN AL RIESGO Y EL CONTENIDO ESTADÍSTICO

Tipo Aversión al Riesgo	Tipo de Contenido Estadístico	
	Comprensión leyes estadísticas	Cálculo probabilístico
Determinismo	2,11,14	4,15
Representatividad	3,10,12,13	5,7,8
Accesibilidad	9	1
Aversión al riesgo		6

III. ANÁLISIS ESTADÍSTICO

A. Análisis descriptivo

Se aplicó IIP al inicio y final del II-2011 con los siguientes resultados: primero el 87,55% (inicio) y 52,9% (final)

de las respuestas fueron clasificadas en la categoría de no estadísticas; segundo el 10,31% (inicio) y 24% (final) fueron pobremente estadísticas y tercero 2,14% (inicio) y 23,1% (final) fueron buenas respuestas estadísticas. Estos resultados, reflejan un avance de argumentos estadísticos. La Tabla III presenta otros resultados que compara ambos periodos.

TABLA III

RESULTADOS IDEAS PREVIAS AL INICIO Y FINAL DEL PERIODO II-2011

Tipo Aversión al Riesgo	Tipo de Contenido Estadístico	
	Comprensión leyes Estadísticas Ini - Fin	Cálculo probabilístico Ini Fin
Determinismo	41,7% - 63,0%	37,1% - 54,4%
Representatividad	36,9% - 55,8%	36,1% - 46,5%
Accesibilidad	38,8% - 47,6%	36,1% - 39,5%
Aversión al riesgo	0,0% - 0,0%	42,9% - 50,3%

B. Análisis categórico de datos

El Análisis descriptivo parece mostrar diferencias en la valoración de ideas previas entre el inicio y final del periodo académico, pero se comprobará estadísticamente. Para la comprobación estadística, en el siguiente apartado 1, se buscaron diferencias significativas entre el inicio y el final del II-2011 con el IIP original. El IIP presentaba 2 categorías: "Comprensión de leyes estadísticas" y "Cálculo probabilístico" mencionadas en [14], las cuales fueron reunidas como 2 categorías de una variable que se denominó "manejo estadístico". La otra variable fue llamada "nivel de respuesta" cuyas categorías son niveles de respuesta 1, 2 y 3 (siendo la 3 la más alta). En el apartado 2 se pretende medir si hay asociación entre las variables "manejo estadístico" y "nivel de respuesta" tanto al inicio del II- 2011 (sin intervención de aula) como al final del II-2011 (después de la intervención de aula).

1) Diferencias Significativas inicio y final de II-2011

En el 2011 se hizo un consolidado de todas las categorías. Así, en 49 personas que respondieron IIP, hay un total de 49*20 preguntas=980 respuestas, las cuales se distribuyeron en 3 categorías. Del total de respuestas, hubo 858 respuestas en la categoría 1, 101 en la categoría 2 y 21 categoría 3. Al final del semestre 48 personas respondieron las mismas 20 preguntas para un total de 960 respuestas. La comparación de proporciones al inicio y al final del semestre está dada por:

$$\begin{pmatrix} \pi_{10} \\ \pi_{20} \\ \pi_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8755102 \\ 0.10306122 \\ 0.02142857 \end{pmatrix} \text{ VS } \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.529166667 \\ 0.239583333 \\ 0.23125 \end{pmatrix}$$

Se comprueba la hipótesis:

$$H_0: \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{10} \\ \pi_{20} \\ \pi_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8755102 \\ 0.10306122 \\ 0.02142857 \end{pmatrix}$$

Con (19), usando un Chi cuadrado con 2 grados de libertad y un nivel de significancia del 0.05. $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$ se obtienen los siguientes intervalos de confianza para π_1, π_2, π_3 :

$$\begin{aligned} I.C1: & 0.48968 \leq \pi_1 \leq 0.56830; \pi_{10} = 0.8755102 \notin I.C1 \\ I.C2: & 0.20755 \leq \pi_2 \leq 0.27485; \pi_{20} = 0.1030612 \notin I.C2 \\ I.C3: & 0.19967 \leq \pi_3 \leq 0.26616; \pi_{30} = 0.0214285 \notin I.C3 \end{aligned}$$

Resultado que indica que sí hay diferencias significativas entre lo evaluado al inicio y al final del semestre II-2011. La proporción de estudiantes, en cuanto a la categoría 3 (la mejor), al final de un curso mejorarán hasta ubicarse en un intervalo de (0.19967- 0.26616) y con la categoría 2 estará en (0.20755 – 0.27485). Nótese como la categoría 1 bajó, lo que indica una mejoría.

2) Asociación de variables “manejo estadístico” y “nivel de respuesta” inicio y final de II-2011

Este análisis se hace con el cuestionario original de 10 preguntas y luego con el de 15 preguntas (Tabla II), es decir, las 5 de selección múltiple adicionales que fueron incorporadas para la presente investigación. Se prueba la hipótesis:

H0: No hay asociación entre las variables

HA: Hay asociación entre las variables

Se empieza buscando asociación entre “manejo estadístico” y “nivel de respuesta” en el inicio II-2011 con 10 preguntas originales. La Fig. 1 muestra la distribución de las proporciones de la variable manejo estadístico en cuanto a las respuestas de la categoría 1, categoría 2 y categoría 3.

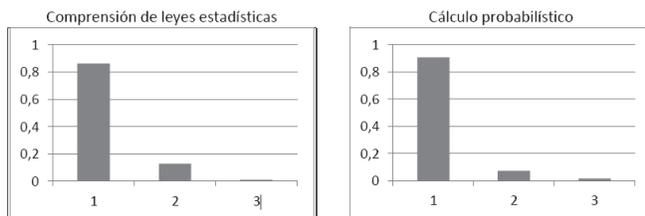


Fig. 1. Valoración ideas previas por categorías y según el manejo estadístico al inicio del periodo II-2011 (primeras 10 preguntas).

Según la Fig. 1 parece no haber diferencias significativas entre las variables, o sea no hay asociación entre ellas. No importa qué manejo estadístico tenga el alumno (cálculo probabilístico o mejor comprensión de las leyes estadísticas) el nivel de respuestas es igual.

El estadístico de prueba usado es $\chi^2 = \frac{\sum(FO-FE)^2}{FE}$. Se obtuvo $\chi^2 = 4.0674$ al comparar con un $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$, $\chi^2 < \chi^2_{2,0.05}$, no se rechaza la hipótesis nula de que las variables no están asociadas. Lo que nos indica es que empezando el II-2011, sin ninguna intervención en clase del tema de probabilidades, las personas que manejaban alguna comprensión de leyes estadísticas, responden al mismo nivel que aquellas que también manejaban alguna comprensión de cálculos estadísticos. Igual análisis se hizo con inicio

II-2011 con 15 preguntas, final II-2011 con 10 preguntas y final II-2011 con 15 preguntas. La Tabla IV muestra los resultados que se comparan con $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$, donde al inicio II-2011 con 15 preguntas el resultado nos lleva a dudar sobre el rechazo de la hipótesis nula ya que 6,0075 es muy similar al valor crítico $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$. Aunque siendo rigurosos en este caso se rechaza la hipótesis y se considerarían las variables dependientes.

En Tabla IV se interpreta que al final del segundo semestre 2011, después de una intervención en el aula, se notó en los grupos alguna mejoría de las variables comprensión de leyes estadísticas y cálculos estadísticos. En el final del II-2011 con 15 preguntas el resultado se traduce en que las variables están asociadas. Nótese resultados similares con 10 y 15 preguntas.

C. Comparación Manova 3 grupos inicio II 2011

Se realizó un análisis MANOVA con los tres grupos al inicio del II-2011. Los grupos constaban de 16, 18 y 15 estudiantes respectivamente. Se tomaron los grupos como las categorías k=1, 2, 3. Consideramos p=3 variables correspondientes a la totalidad de aciertos en categoría 1, 2 y 3 respectivamente. El análisis se hizo en el software Infostat, en la Fig. 2 se muestra una salida de este software, nótese que esta salida corresponde a la matriz H.

1) Cálculo de estadísticos

Para probar la hipótesis de que los tratamientos son iguales, se calculan los estadísticos de Lambda de Wilks, L Hotelling, Roy y Pillai, ver ecuaciones (9), (10) y (11). La Fig. 3 es una salida del Infostat para estos estadísticos.

TABLA IV
PRUEBAS DE ASOCIACIÓN DE VARIABLES MANEJO ESTADÍSTICO Y NIVEL DE RESPUESTA EN 2011

Manejo Estadístico	χ^2	Resultado
inicio II-2011; 10 preguntas	4.0674	variables no asociadas
inicio II-2011; 15 preguntas	6.0075	variables asociadas (duda)
final II-2011; 10 preguntas	21.864	variables asociadas
final II-2011; 15 preguntas	32.182	variables asociadas

Matrices de sumas de cuadrados y productos cruzados

grupos 2011			
	cate1	cate2	cate3
cate1	25,34	-17,46	-7,88
cate2	-17,46	13,70	3,76
cate3	-7,88	3,76	4,12

Fig. 2. Salida del Infostat para los 3 grupos inicio II-2011.

El estadístico Lambda de Wilks transformado a F, (12) y (13), deja un p valor = 0,02 < $\alpha=0,05$. También se puede interpretar que $F = 2,747811631 > F_{6,88,0.05} = 2,03$

Cuadro de Análisis de la Varianza (Wilks)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	
grupos 2011	0,72	2,66	6	88	0,0202

Cuadro de Análisis de la Varianza (Pillai)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	
grupos 2011	0,30	2,63	6	90	0,0215

Cuadro de Análisis de la Varianza (Lawley-Hotelling)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	
grupos 2011	0,37	2,62	6	86	0,0221

Fig. 3. Salidas de los estadísticos en Infostat con información de 3 grupos inicio II-2011.

Se rechaza la hipótesis nula de que hay igualdad entre los tres tratamientos. Los tres grupos producen resultados diferentes.

2) Supuesto de homocedasticidad Manova 2011

El Infostat no brinda la comprobación del supuesto de homocedasticidad, por lo tanto se ha construido en Excel, la prueba M de Box con (14) y (15). Los grados de libertad para este caso es $\nu = 12$. El chi cuadrado correspondiente es $\chi^2_{0,05,12} = 21,02606982$.

Se encontraron ceros en la tercera matriz de varianzas covarianzas por lo que M de box = 0 el logaritmo natural de cero es un número que tiende a $-\infty$, por lo tanto, en (16), U es un número que tiende a infinito, muy grande comparado con 21,02606982, que verifica que las varianzas están muy lejos de ser iguales, lo que pone en duda la conclusión a cerca del no rechazo de la hipótesis nula (4) del anterior apartado.

IV. ANÁLISIS GRUPO DE REFERENCIA I-2012

D. Análisis categórico de datos

Aunque la intervención docente se planeó hasta el segundo semestre de 2011, se hizo un análisis adicional con estudiantes de estadística del I-2012 (sin intervención de aula), como referencia o a manera de grupo control. De tal manera que, al final del I-2012, 31 estudiantes respondieron las 20 preguntas y al final del semestre II-2011 lo hicieron 48 estudiantes. La comparación de vectores de proporción es:

$$\begin{pmatrix} \pi_{10} \\ \pi_{20} \\ \pi_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6129 \\ 0.2516 \\ 0.1354 \end{pmatrix} \text{ VS } \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.529166667 \\ 0.239583333 \\ 0.23125 \end{pmatrix}$$

Se comprueba la hipótesis:

$$H_0: \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_{10} \\ \pi_{20} \\ \pi_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6129 \\ 0.2516 \\ 0.1354 \end{pmatrix}, \text{ para } \pi_1, \pi_2, \pi_3$$

Los siguiere con (19):

$I.C1: 0.48968 \leq \pi_1 \leq 0.56830; \pi_{10} = 0.6129 \notin I.C1$
 $I.C2: 0.20755 \leq \pi_2 \leq 0.27485; \pi_{20} = 0.2515 \in I.C2$
 $I.C3: 0.19967 \leq \pi_3 \leq 0.26616; \pi_{30} = 0.1354 \notin I.C3$
 Resultado que indica que se rechaza la hipótesis nula, lo cual nos dice que sí hay diferencias significativas entre lo evaluado al final del semestre II-2011 y lo evaluado al final I-2012 (sin intervención de unidades didácticas). Nótese que la categoría 3 con 0.1354 en proporción es significativamente

menor que la categoría 3 del final II-2011 (con intervención de lúdicas, unidades didácticas y tecnologías de información). Lo anterior apunta hacia un resultado favorable para la intervención docente.

E. Análisis Manova final I-2012

Se hizo análisis para tres grupos, con 15, 18 y 15 alumnos respectivamente, se tomaron los grupos como las categorías $k=1, 2, 3$. Se asume $p = 3, p = 3$ variables correspondientes a la totalidad de aciertos en categoría 1, 2 y 3 respectivamente. Se usó el software libre Infostat, en la Fig. 4 la salida correspondiente y en la Fig. 5 se muestran los estadísticos de prueba.

Fig. 4. Salida de Infostat correspondiente a la matriz H. Matrices de sumas de cuadrados y productos cruzados grupos 2012

	cate1	cate2	cate 3
cate1	216,86	-17,72	-199,13
cate2	-17,72	4,67	13,05
cate3	-199,13	13,05	186,08

1) Conclusiones Manova final I-2012

Lambda de Wilks transformado a F, con (12) y (13), deja un $p\text{valor} = 0,0001 < \alpha = 0,05$ o también se puede decir que $F = 5,29 > F_{6,86,0,05} = 2,206$; los tres grupos no producen resultados similares.

1) Verificación de supuesto de Homocedasticidad manova final I-2012

El supuesto de homocedasticidad se calculó con la prueba M de Box con (14), (15), (16) y (17). U se compara con una chi cuadrado de $\nu = 12$ grados de libertad. El chi cuadrado correspondiente es $\chi^2_{0,05,12} = 21,02606982$.

Cuadro de Análisis de la Varianza (Wilks)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	p
grupos 2012	0,53	5,29	6	86	0,0001

Cuadro de Análisis de la Varianza (Pillai)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	p
grupos 2012	0,48	4,65	6	88	0,0004

Cuadro de Análisis de la Varianza (Lawley-Hotelling)					
F.V.	Estadístico	F	gl (num)	gl (den)	p
grupos 2012	0,87	6,12	6	84	<0,0001

Fig. 5. Salida Infostat de los estadísticos con información del final II-2011.

Se encontró que:

$$U = -2(1 - D) \ln M = 18,13745237 < 21,02606982,$$

lo que verifica que se aprueba la hipótesis nula de que las varianzas son iguales, favoreciendo la afirmación de que los grupos en el final I-2012 son diferentes en sus resultados.

V. CONCLUSIONES

Los análisis estadísticos mostraron influencia de la intervención de aula a través de UD diseñadas con elementos lúdicos y tecnología informática. El análisis categórico muestra que sin ninguna intervención de aula,

los estudiantes que tengan un mínimo nivel de comprensión de leyes estadísticas, responden al mismo nivel que aquellas que también manejaban alguna comprensión de cálculos estadísticos, lo que tiene mucho sentido, pues sin conceptos claros no se pueden realizar cálculos ni desarrollar pensamiento probabilístico. El Manova al inicio de II-2011 muestra diferencias significativas entre los tres grupos, pero no cumplió con el supuesto de homocedasticidad, por lo que en este caso, Manova no refuerza el análisis categórico realizado.

Al final del semestre, los resultados cambian, el análisis categórico deja ver que las variables “manejo estadístico” y “nivel de respuesta” tienen asociación (tanto con cuestionario de 10 como de 15 preguntas). Hasta este momento, sin embargo, se piensa que la intervención de aula contribuye al mejoramiento conceptual y cálculo probabilístico en los estudiantes. El mejoramiento podría haberse dado sin intervenir con lúdica y tecnología informática, que puede ser una duda válida que surge. Para verificar tal duda se hizo el análisis de proporciones multinomial entre tres grupos al final II-2011 y tres grupos al final I-2012. Este análisis evidenció que esta forma de enseñar estadística puede impactar mejor en el aprendizaje que si se abordara únicamente con problemas de solución corta. El Manova al final del I-2012 muestra diferencias significativas en los 3 grupos cumpliendo el supuesto de homocedasticidad, resultado que se puede interpretar como una necesidad de implementar unidades didácticas comunes para que se den procesos de enseñanza aprendizaje más homogéneos.

REFERENCIAS

- [1] C. Batanero, “Training Researchers in the Use of Statistics,” International Association for Statistical Education and International Statistical Institute, pp. 385-396, 2001.
- [2] Cox D.R, “The current position of statistics: A personal view,” International Statistical., pp. 261-276, 1997.
- [3] J. Gómez Arias, “Una actividad para la enseñanza de la probabilidad diseñada con el método histórico cultura de Vigostky y la teoría de la actividad de Leóntiev,” Acta latinoamericana de Matemática Educativa, pp. 416- 426, 2008.
- [4] A. R. Gil Armas, “La estadística oficial en el aula,” Revista Iberoamericana de educación Matemática, n° 24, pp. 177-182, 2010.
- [5] H. M. Trevethan, V. YumiKataoka y M. S. Oliveira, “El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico,” Revista Iberoamericana de Educación matemática, vol. 69, 2010.
- [6] L. A. Toro, “Modelo computacional Representacional de la Matemática,” Revista Anfora, vol. 28, pp. 151-178, 2010.
- [7] L. G. Díaz Monroy y M. A. Morales Rivera, “Análisis estadístico de datos multivariados,” Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [8] K. Pillai, “Some new test criteria in Multivariate Analysis,” Annals of Mathematical Statistics, vol. 26, pp. 117-121, 1955.
- [9] H. Hotelling, “The Generalization of Student’s ratio,” Annals of Mathematical Statistics, vol. 2, pp. 360-378, 1931.
- [10] S. Roy, “On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis,” Annals of Mathematical Statistics, vol. 24, pp. 220-230, 1953.
- [11] J. Clavijo M, “Apuntes de Análisis Multivariado,” Ibagué Colombia: Universidad del Tolima, 2005.
- [12] M. Barlett, “A note on multiplying factors for various chi-square approximations,” Journal of the Royal Statistical Society, Series B, vol. 16, pp. 296-298, 1954.
- [13] C. D. y. H. Quesenberry, “Large Simple Simultaneous Confidence Intervals for Multinomial Proportions,” Technometrics, vol. 6, pp. 191-195, 1964.

- [14] C. Sáenz Castro, “Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico,” Universidad Autónoma de Madrid, Facultad de Psicología, Departamento, Madrid España, 1995.



Jhon Jairo Vargas Sánchez nació en Manizales, Colombia, el 16 de Junio de 1971. Se graduó en la Universidad Nacional de Colombia como Ingeniero Industrial en 1996 y en la Universidad Tecnológica de Pereira como Magíster en Investigación Operativa y Estadística en 2012. Candidato a Doctor en Ingeniería Universidad Nacional de Colombia.

Ejerció profesionalmente en Pilas Varta, y otras empresas de Manizales y Medellín Colombia. Entre sus campos de interés están la estadística multivariada y el análisis envolvente de datos. Con experiencia de docencia de más de 7 años en áreas de Matemáticas, Estadística y Simulación.



Orlando Valencia Rodríguez nació en Chinchiná Caldas, el 29 de noviembre de 1971. Ingeniero Industrial de la Universidad Nacional de Colombia, Especialista en Desarrollo Gerencial y Maestría en Investigación Operativa y Estadística de la Universidad Tecnológica de Pereira. Candidato a Doctor en Ingeniería Universidad Nacional de Colombia.

Como profesional se ha desempeñado en el área de calidad y estandarización de procesos, consultor en el área de control interno, desarrollo empresarial hospitalario y reingeniería organizacional en el sector salud. Con más de 12 años de docencia universitaria, en Estadística e Investigación de Operaciones.



José Daniel Gallo Gallón Nació en Filadelfia (Caldas-Colombia) el 20 de Diciembre de 1.962, Economista de la Universidad de Manizales, Especialista en Computación para la Docencia y Maestría en enseñanza en Matemáticas con énfasis en Estadística.

Ha ejercido docencia universitaria durante los últimos 18 años en cursos de Estadística, Investigación de operaciones, Economía y Macroeconomía.