

Cálculo del factor de concentrador de esfuerzos en placas planas utilizando diferentes elementos de discretización por medio del método de elementos finitos¹

Calculation of stress concentrator factor in flat plates using different elements of discretization by the finite element method

Cálculo do fator de concentrador de esforços em placas planas utilizando diferentes elementos de discretização através do método de elementos finitos

J.S. Clavijo, C.D. Montoya y L.C. Flórez

Recibido Octubre 15 de 2015 – Aceptado Febrero 19 de 2016

Resumen— En este trabajo, haciendo uso del método de elementos finitos (MEF) en elasticidad bidimensional, se calculan los cambios en el factor de concentración de esfuerzos generados cuando se utilizan diferentes elementos de aproximación (CST, LST, Q4 y Q8) en placas planas, además, es objeto de estudio si el refinamiento de la malla en las cercanías al concentrador, afecta el valor del factor de concentrador de esfuerzos. Este análisis se realizó por medio de un algoritmo desarrollado en Matlab y sus resultados se comparan con los generados por el método analítico y las simulaciones de Comsol Multiphysics.

Palabras clave—deformación, elasticidad, esfuerzo, factor de concentración de esfuerzos, método de elementos finitos.

Abstract—In this work, and by using the finite element

method (FEM) in two dimensional elasticity, the changes on the stress concentration factor generated by using different elements of approximation (CST, LST, Q4 and Q8) on flat plates are calculated, it is also a factor of study, if the mesh refinement in nearby to the concentrator affecting the value of the stress concentration factor. This analysis is performed by an algorithm developed in Matlab and compared with the results generated by the analytical method and Comsol Multiphysics simulations.

Key words—deformation, elasticity, stress, stress concentration factor and finite element method

Resumo – Neste trabalho, fazendo uso do método de elementos finitos (MEF) em elasticidade bidimensional, se calculam as mudanças no fator de concentração de esforços gerados quando se utilizam diferentes elementos de aproximação (CST, LST, Q4 e Q8) em placas planas, além disso, é objeto de estudo se o refinamento da malha nas proximidades ao concentrador, afeta o valor do fator de concentrador de esforços. Esta análise se realizou por meio de um algoritmo de desenvolvimento em Matlab e seus resultados se compararam com os gerados pelo método analítico e as simulações de Comsol Multiphysics.

Palavras chave: deformação, elasticidade, esforço, fator de concentração de esforços, métodos de elementos finitos.

¹Producto derivado del proyecto de investigación “Análisis de esfuerzos por medio del método de elementos finitos en elementos mecánicos con diferentes elementos de discretización”. Presentado por el Grupo de Investigación CONFORMAT UTP, Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira.

J.S. Clavijo, Ingeniero Mecánico de la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia); email: jsclavijo@utp.edu.co

C.D. Montoya, Ingeniero Mecánico de la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia); email: cedamontoya@utp.edu.co

L.C. Flórez, Docente en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia); email: louis@utp.edu.co

I. INTRODUCCIÓN

EL empleo del MEF permite efectuar un análisis preciso, fiable, versátil y flexible aplicable a diferentes geometrías.

El presente estudio describe el comportamiento de una placa plana isotrópica sometida a deformación plana, producida por una carga constante aplicada en su extremo libre y con el otro empotrado, donde son factores de estudio tres concentradores (agujero centrado, acanaladura semicircular y cambio de sección), el refinado de la malla en las cercanías del concentrador y el tipo de elemento de discretización se hace utilizando el MEF. Los cálculos del esfuerzo se realizan por medio de un algoritmo desarrollado en Matlab implementando la simulación en Comsol Multiphysics; con los esfuerzos obtenidos se calcula el factor de concentración de esfuerzo.

Se pretende comparar los resultados obtenidos a partir de diferentes tipos de elementos de aproximación (CST, LST, Q_4 y Q_8) y dos refinamientos distintos del mallado, programados con un algoritmo desarrollado en Matlab confrontándolos con las simulaciones de Comsol Multiphysics y el método analítico de la mecánica de materiales. Los elementos de aproximación seleccionados pertenecen a los dos primeros niveles del triángulo de Pascal (lineal Q_4 y cuadrático Q_8 , ver Fig. 1) de la familia Serendipita [1] y triangular (lineal CST y cuadrático LST. Ver Fig. 2), cuyos elementos poseen la característica que no presentan nodos internos en el elemento.

El MEF para la mecánica de estructuras en placas planas bidimensionales es desarrollado bajo el principio de la energía potencial mínima [2], con las ecuaciones de la elasticidad basadas en desplazamientos para análisis lineal.

II. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

A. Concentradores

Un concentrador de esfuerzos se define como cualquier discontinuidad (muescas, chaveteros, agujeros, cambios de sección, ranuras, etc.) en la sección transversal de una pieza que pueda provocar un incremento de los esfuerzos en las cercanías a dicha discontinuidad. Los concentradores de esfuerzos pueden o no ser significativos, todo depende de las cargas a las que la pieza sea sometida [3].

1. Factor de concentración de esfuerzos

El factor de concentración de esfuerzo teórico k_t se define como la relación entre el esfuerzo máximo y el esfuerzo normal promedio que actúa en la sección transversal (Ec. 1) y puede ser determinado mediante métodos experimentales (estudios fotoelásticos, cubierta frágil o medidores de tensión) o técnicas de matemáticas avanzadas utilizadas en la teoría de la elasticidad [4]. Por lo general el cálculo se

realiza en la sección de menor área transversal, que es donde se presenta el esfuerzo máximo [5].

$$k_t = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{prom}}} \quad (1)$$

Para geometrías sencillas el cálculo del factor k_t es fácil debido a que se encuentran caracterizado en tablas y gráficos como los que se observan en Pilkey [6] y Norton [7]. No obstante para concentradores con geometrías poco comunes se hace necesario realizar un análisis más profundo.

B. Método de elementos Finitos

El MEF implica el modelado de la estructura utilizando pequeños elementos interconectados denominados elementos finitos. Una función de desplazamiento está asociada con cada elemento finito y cada elemento interconectado está vinculado, directa o indirectamente, a cualquier otro elemento a través de interfaces comunes (o compartidos), incluyendo nodos y/o líneas de contorno y/o superficies [8].

1. Elasticidad lineal en MEF

Los problemas de elasticidad en dos dimensiones son frecuentes en ingeniería y es en ellos donde se aplicó por primera vez el MEF. Esta sección trata del análisis estático aplicado a sólidos bidimensionales sometidos a tensión plana, que se define como un estado de esfuerzos en el que la tensión normal y la tensión cizallante en dirección perpendicular al plano se suponen nulas. Por lo tanto existe una deformación unitaria no nula en dicha dirección [2] como se puede observar en la Ec. 2:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde E, ν son el módulo de elasticidad y la relación de Poisson respectivamente, consideradas propiedades inherentes al material.

La relación entre el esfuerzo y la deformación es dada por la Ec. 3:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (3)$$

a. Desplazamiento y esfuerzo

La posición de un punto está determinada por las coordenadas (x,y) , y su deformación presenta dos componentes $u(x,y)$, $v(x,y)$, en las direcciones x y y respectivamente. En tal sentido, el campo de deformaciones es por lo tanto el vector (ver Ec. 4):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

b. Funciones de interpolación

El campo de las deformaciones dentro del elemento se puede aproximar por medio de las Ec. 5 y 6:

$$u = \sum N_i U_i \tag{5}$$

$$v = \sum N_i V_i \tag{6}$$

donde N_i son las funciones de interpolación del elemento, que generalmente son funciones de las coordenadas x , y . Nótese que se emplean las mismas funciones para interpolar los desplazamientos u y v , y que ambos desplazamientos se interpolan por separado, el campo u mediante las U_i y el campo v mediante las V_i [2].

La matriz de funciones de interpolación $[N]$ posee dos filas y tantas columnas, como grados de libertad existan entre todos los nodos de un elemento (Ec. 7):

$$C. Mat. N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

Familiarizarnos con la matriz de rigidez es el paso esencial para la comprensión del método de rigidez. Para un elemento [1], la matriz de rigidez puede definirse mediante la Ec. 8, así:

$$\{f\} = [k]\{d\} \tag{8}$$

donde la matriz $[k]$ relaciona el desplazamiento nodal $\{d\}$ y la fuerza nodal $\{f\}$.

La expresión obtenida del principio de energía potencial mínima para la matriz de rigidez de un elemento plano cualquiera se representa con la Ec. 9:

$$[k] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \tag{9}$$

En la Ec. 9 la matriz $[B]$, se obtiene derivando la matriz de funciones de interpolación $[N]$ respecto a las coordenadas x , y , donde n es la cantidad de nodos en el elemento, ver Ec. 10.

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{10}$$

La matriz de rigidez global $[K]$ (Ec. 11) relaciona las coordenadas globales (x,y) con el desplazamiento $\{d\}$ y la fuerza global $\{F\}$,

$$\{F\} = [K]\{d\} \tag{11}$$

2. Familia Serendípita

Los elementos serendípticos fueron descubiertos de forma casual por mera observación y es conveniente usarlos cuando se quiere que las funciones de forma dependan

de los valores nodales en las aristas del elemento. Sus características son [2]:

- Los nodos están situados en el contorno del elemento.
- La normalización de la geometría con un cambio de coordenadas, donde se busca generar un cuadrado de tamaño 2×2 en el dominio $[-1,1]$ para cada eje coordenado.
- La cantidad de nodos en cada lado del elemento define el grado del polinomio.
- La función de interpolación completa, es el producto de las funciones en cada dirección.

Un elemento cuadrilátero genérico de 4 nodos y otro de 8 nodos se representa gráficamente en la Fig. 1.

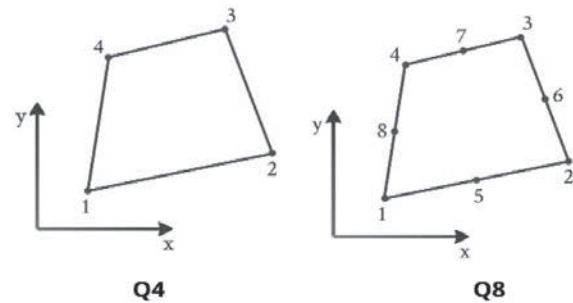


Fig. 1. Elemento cuadrilátero lineal y cuadrilátero cuadrático.

3. Familia triangular

El empleo de elementos triangulares muestra su potencialidad al representar geometrías complejas mucho más fácilmente que sus homólogos cuadriláteros; además, el costo de cálculo es menor para cada elemento. Debido a ello, la utilización de estas familias es ampliamente usada en programas computacionales de elementos finitos [9].

Los elementos triangulares lineales y cuadráticos se representan en la Fig. 2.

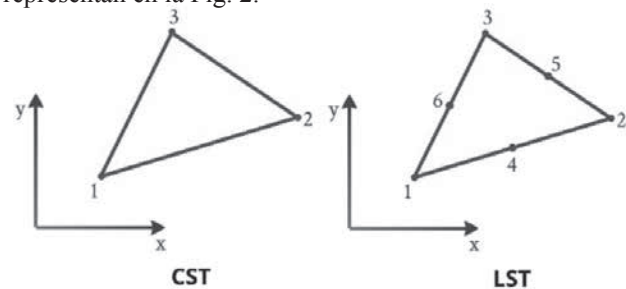


Fig. 2. Elemento triangular lineal y cuadrático

4. Transformación de coordenadas

Con las transformaciones isoparamétricas se busca modificar geoméricamente el elemento de tal forma que su análisis matemático sea más sencillo que si se quisiera hacer en las coordenadas globales; este nuevo sistema coordenado se conoce como sistema natural o local.

a. Elementos Serendípticos

En la familia Serendípita, la transformación

isoparamétrica convierte un cuadrilátero genérico en coordenadas cartesianas x, y en un cuadrilátero cuadrado unitario en coordenadas naturales de ξ y η ; donde, para cada variable, el cuadrilátero está dentro del dominio $[-1,1]$. Las funciones de forma o interpolación para elasticidad bidimensional se encuentran en diversos libros de elementos finitos, por ejemplo Daryl [1] o Kattan [8]. Para un elemento serendípito de ocho nodos, la transformación geométrica está representada en la Fig. 3.

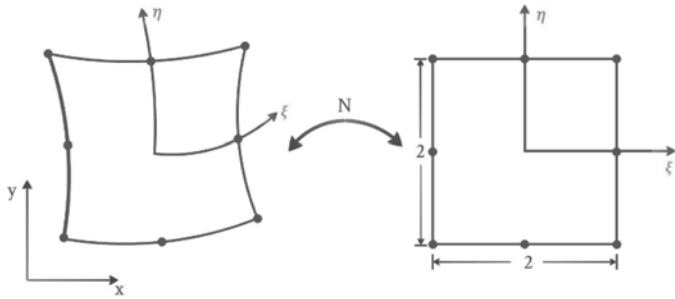


Fig. 3. Transformación de coordenadas elemento Serendípito de 8 nodos.

b) *Coordenadas de área, elementos triangulares*

Los elementos triangulares tienen una configuración especial y para ellos se adopta un sistema de referencia en términos de áreas. Un punto $P(x, y)$ puede ser representado en término de las coordenadas locales L_1, L_2 y L_3 . Las coordenadas locales L_i representan la variación de cada arista del triángulo a medida que recorre el área del triángulo (Fig. 4a). Las variables locales en términos del área son dadas por las Ec. 12 y 13.

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \text{ donde } i = 1,2,3 \tag{12}$$

Además se cumple:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \tag{13}$$

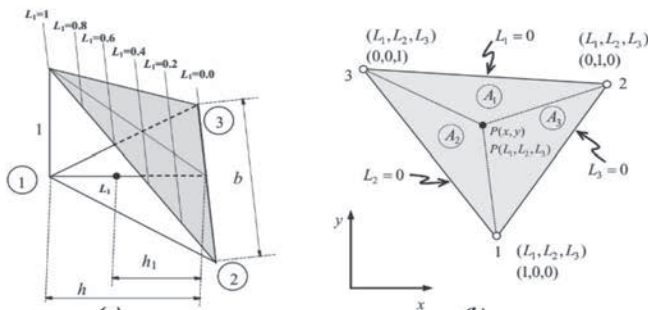


Fig. 4. Relación de las coordenadas naturales L con las globales x, y .

5. *Integración numérica*

El cálculo de la integral de la matriz de rigidez de la Ec. 9 es un paso importante en el desarrollo de los elementos finitos en elasticidad; por lo general, las componentes de la matriz son polinomios singulares y su integración analítica no es posible. Debido a esto, se plantea una solución numérica por

el método de Gauss – Legendre o Cuadratura de Gauss para polinomios ortogonales [10].

La integral definida de la Ec. 9 se puede expresar por medio de la Ec. 14:

$$[k] = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{14}$$

Si se aborda la ecuación 14 para una variable, se puede reescribir la solución en la cuadratura de Gauss como se muestra en la Ec. 15:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_1^n W_i f(\xi_i) \tag{15}$$

donde n es la cantidad de puntos de Gauss a emplear. Siempre habrá $2n$ incógnita (W_i, ξ_i) y la solución será exacta para polinomios de grado $(2n - 1)$, W_i es una función de peso que permite eliminar las singularidades en la integración; ξ_i son las raíces del polinomio ortogonal de Legendre.

En la Tabla 1 se muestran los coeficientes de peso y las abscisas para la cuadratura de Gauss para los primeros 4 puntos de Gauss.

TABLA I
ABSCISAS Y COEFICIENTES DE PESO DE LA CUADRATURA DE GAUSS

n	$\pm \xi_i$	W_i
1	0	2
2	0.577350269189626	1
3	0.774596669241483	0.555555555555556
	0	0.888888888888889
4	0.861136311594053	0.347854845137454

Aplicando la cuadratura de Gauss a la ecuación 15, se deduce una expresión para dos dimensiones. Inicialmente se resuelve la integral interior ξ para dejando constante η , luego, se integra la nueva expresión para η . La ecuación 16 representa la integral en dos dimensiones.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{16}$$

Para los elementos triangulares, la cuadratura de Gauss se define por medio de la Ec. 17.

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^n W_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \tag{17}$$

III. PRUEBAS Y SIMULACIÓN

Los concentradores en placas planas bidimensionales que se analizan son:

- Agujero centrado
- Acanaladuras semicircular
- Cambios de sección

Los cuatro tipos de elementos de aproximación del malla:

- Elemento triangular de 3 nodos CST, Fig. 2.
- Elemento triangular de 6 nodos LST, Fig. 2.
- Elemento cuadrilátero de 4 nodos Q4, Fig. 1.
- Elemento cuadrilátero de 8 nodos Q8, Fig. 1.

Con el fin de conocer cuál es la variación del factor al refinar el mallado en las cercanías del concentrador de esfuerzos, se realizan dos tipos de pruebas o simulaciones para cada placa, teniendo como parámetro el refinamiento de las aristas en las cercanías del concentrador:

- Mallado uniforme, que posee la característica de que la longitud de arista es aproximadamente la misma. Ver Fig. 5a.
- Mallado con refinado fino, donde se realiza una reducción de las aristas en las zonas críticas a un nivel más fino. Ver Fig. 5b.

En el análisis por elementos finitos, el cálculo de los esfuerzos máximos y la determinación del factor de concentración de esfuerzos se realizan con Matlab.

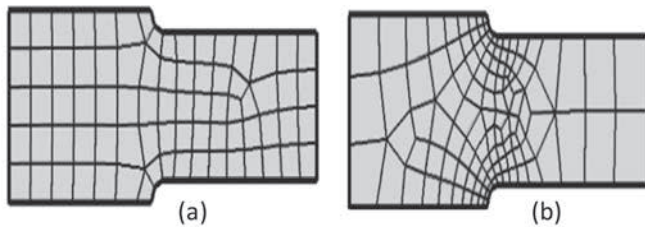


Fig. 5. Placa con mallado uniforme (a) y mallado fino (b).

En la Fig. 6 se presenta el diagrama de flujo utilizado para resolver problemas estructurales en placas planas mediante el MEF bidimensional, empleando la tensión plana. Se utiliza Comsol para discretizar la placa con los elementos de aproximación lineal CST y Q₄, y para los elementos cuadráticos ST y Q₈ se recurre a las ecuaciones de punto medio para definir los nodos intermedios de cada elemento.

A. Condiciones iniciales

En la Tabla II se encuentran contenidas las condiciones de contorno y del material que se utilizaron para realizar las simulaciones. Las dimensiones se pueden referenciar en la Fig. 7 y las propiedades del material corresponden a un acero AISI 4340.

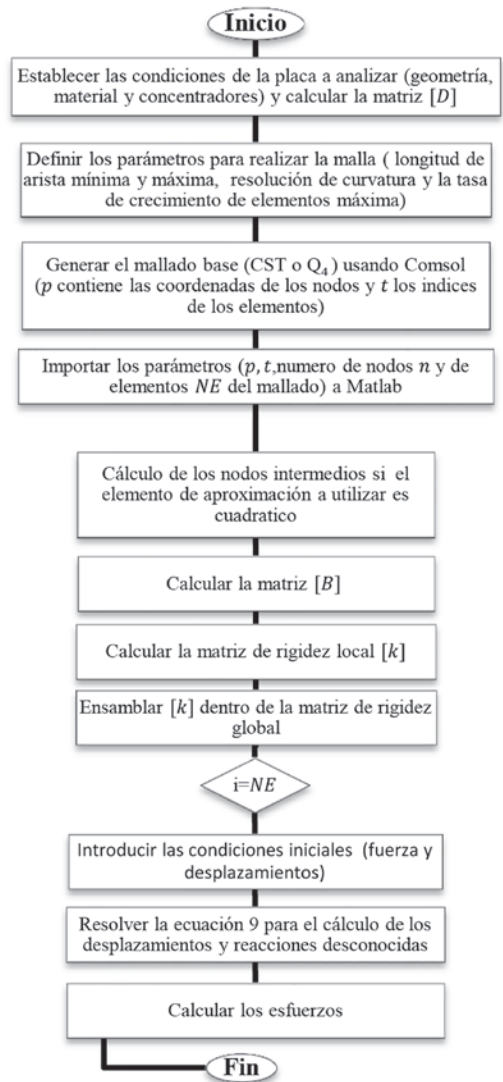


Fig. 6. Diagrama de flujo para placas planas con tensión plana.

Fig. 7 y las propiedades del material corresponden a un acero AISI 4340.

TABLA II.
CONDICIONES INICIALES

TABLA II.
CONDICIONES INICIALES

Variable	Cantidad
Espesor <i>h</i>	0.0250 <i>m</i>
Largo	0.6000 <i>m</i>
Ancho <i>H</i>	0.2000 <i>m</i>
Radio <i>r</i>	0.0231 <i>m</i>
Módulo de Young <i>E</i>	205 <i>GPa</i>
Relación de Poisson <i>ν</i>	0.28

La condición de frontera para la placa en las simulaciones es:

- La placa a analizar es empotrada en el extremo izquierdo.
- El extremo derecho es sometido a una carga tensionante de 100N.
- La carga es distribuida para todos los nodos del extremo derecho que forman parte de *H* como se muestra en la

Fig 7. ; tomando un cuarto de para los nodos superior e inferior, un medio para los nodos siguientes y el resto de nodos que pudiesen existir se dividen en.

- $T = 100 / (\text{Núm nodos}_{\text{del extremo derecho}} - 2.5)$

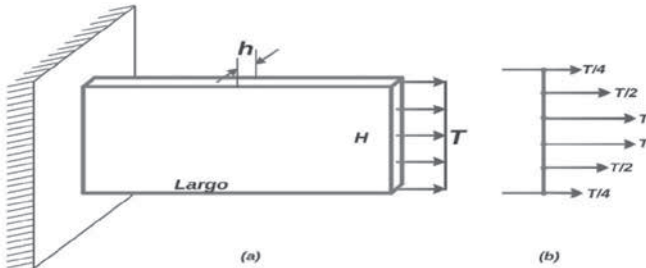


Fig. 7. Placa plana sometida a tensión.

IV. RESULTADOS

Los resultados fueron agrupados desde la Fig. 8 a la Fig. 19, de tal forma que una gráfica contiene las curvas con los valores obtenidos en Matlab y Comsol para cada configuración de refinamiento, la familia de elementos y el concentrador de esfuerzos. La recta horizontal de color negro correspondiente al factor teórico de concentración de esfuerzos.

Para mejorar la visualización de las gráficas, en la Tabla 3 se tabulan las leyendas de la Fig. 8 a la Fig. 19 con su respectiva descripción. Los marcadores con forma de cuadrado corresponden a la familia Serendípita, los triángulos a la familia triangular.

TABLA III.
LEYENDA DE LAS CURVAS DE RESULTADOS

Leyenda	Correspondencia
—	Curva de Matlab para un elemento lineal
- - - - -	Curva del elemento lineal de Comsol
—	Curva del elemento cuadrático de Matlab
- - - - -	Curva del elemento cuadrático de Comsol
	Curva del factor teórico calculado analíticamente

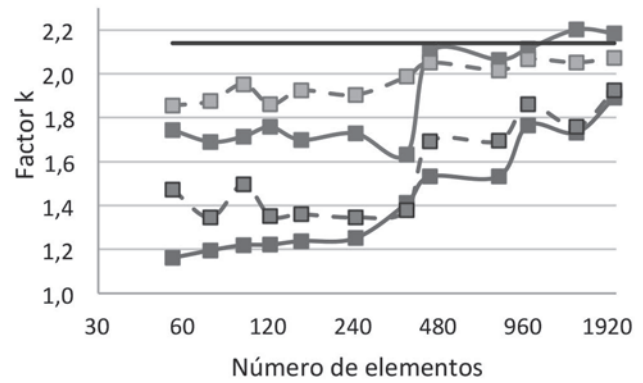


Fig. 8. Factor de concentración de esfuerzos (k) en placa con acanaladura y longitud de arista uniforme empleando elementos cuadriláteros.

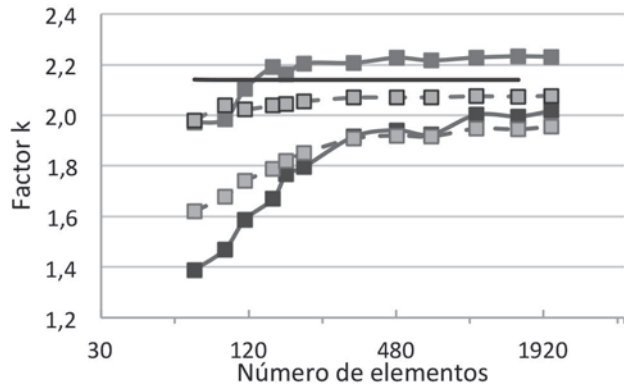


Fig. 9. Factor de concentración de esfuerzos (k) en placa con acanaladura con refinado fino.

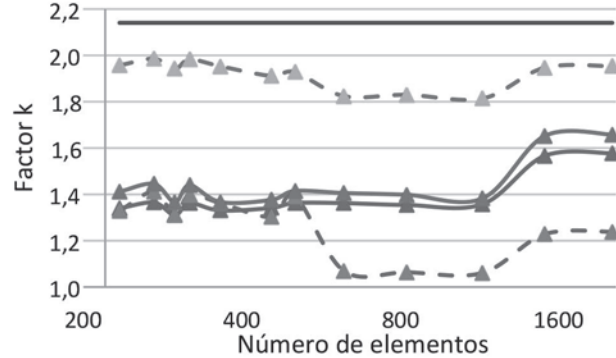


Fig. 10. Factor de concentración de esfuerzos (k) en placa con acanaladura y longitud de arista uniforme, para elementos triangulares

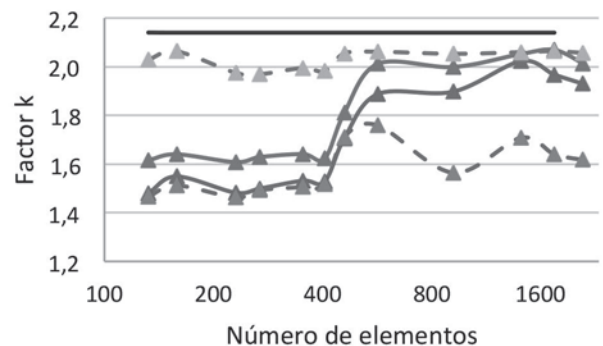


Fig. 11. Factor de concentración de esfuerzos (k) en placa con acanaladura con refinado fino.

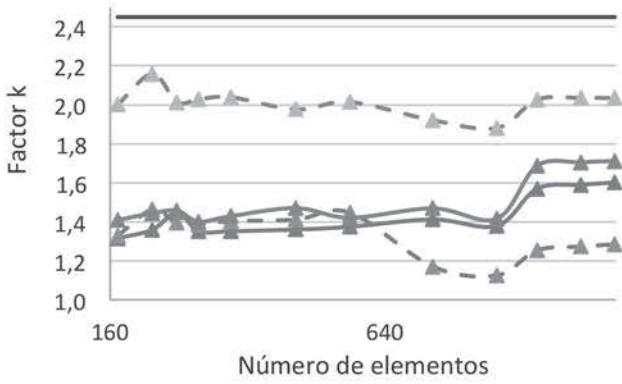


Fig. 12. F actor de concentración de esfuerzos (k) en placa con agujero y longitud de arista uniforme.

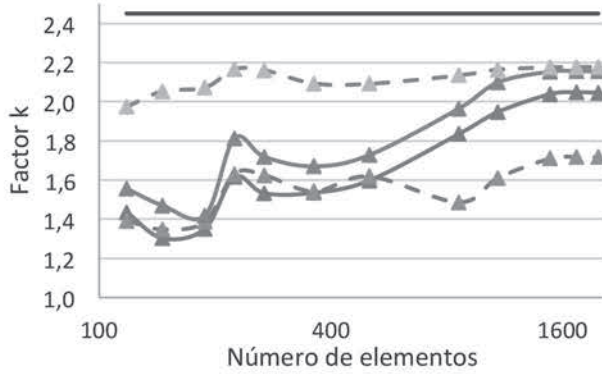


Fig. 13. F actor de concentración de esfuerzos (k) en placa con agujero refinado Fino

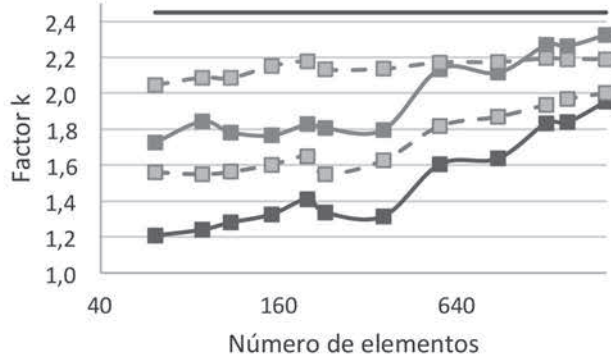


Fig. 14. F actor de concentración de esfuerzos (k) en placa con agujero y longitud de arista uniforme

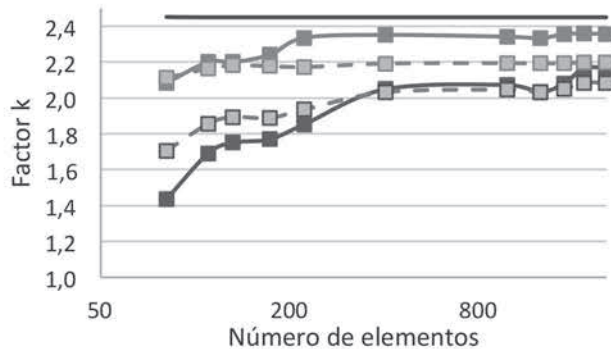


Fig. 15. F actor de concentración de esfuerzos (k) en placa con agujero refinado Fino

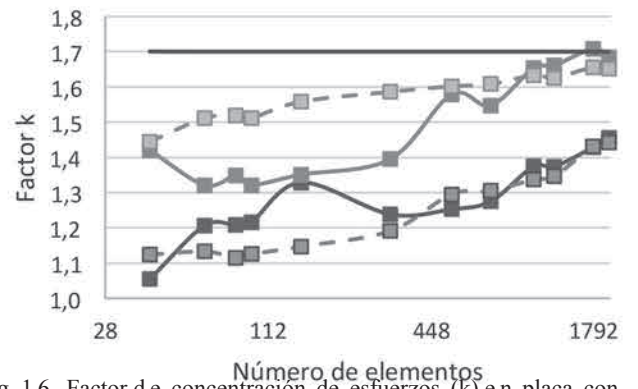


Fig. 16. Factor de concentración de esfuerzos (k) en placa con Cambio de sección y longitud de arista

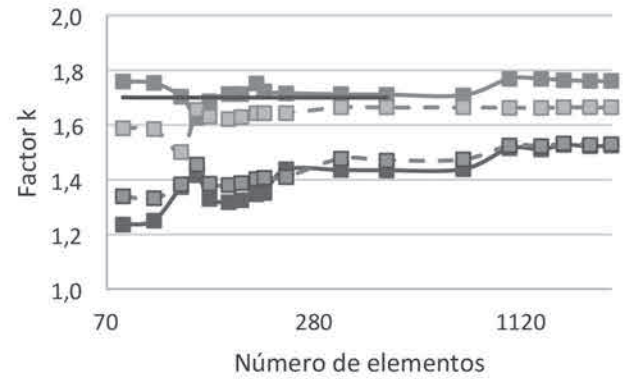


Fig. 17. F actor de concentración de esfuerzos (k) en placa con Cambio de sección refinado fino

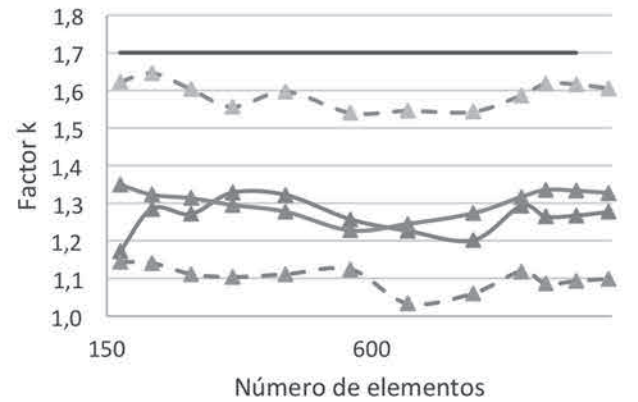


Fig. 18. Factor de concentración de esfuerzos en placa con Cambio de sección y longitud de arista uniforme

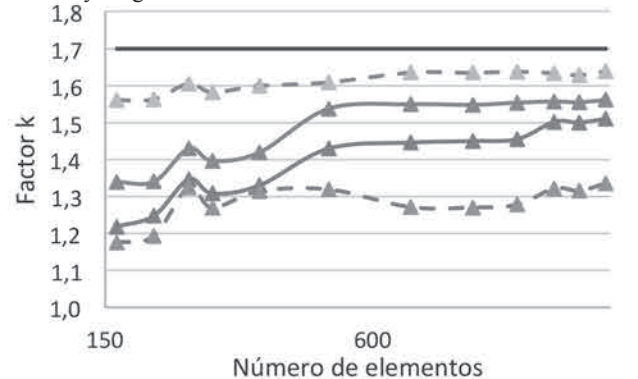


Fig. 19. Factor de concentración de esfuerzos en placa con Cambio de sección refinado fino

V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El elemento CST programado en Matlab representa una buena aproximación al factor teórico, este elemento de discretización mejora los resultados al refinar el mallado y utilizar una mayor cantidad de elementos.

El elemento CST programado en Matlab utilizando refinado fino y una cantidad amplia de elementos, presenta un comportamiento similar que el elemento LST programado en Matlab.

El elemento cuadrático LST programado en Matlab presenta buenas aproximaciones cuando se realiza un refinado fino en las cercanías del concentrador y se trabaja con grandes cantidades de elementos.

El elemento que más se aleja de los resultados teóricos en los elementos triangulares es CST simulado en Comsol, sin embargo, el proceso de refinamiento en las cercanías del concentrador y el utilizar grandes cantidades de elementos mejora su comportamiento.

El elemento LST simulado en Comsol presenta los resultados más próximos al factor teórico para los elementos triangulares. Además, los resultados no se ven afectados al aumentar la cantidad de elementos (presenta estabilidad) y el grado de mejoramiento al realizar el proceso de refinado es mínimo.

Los resultados obtenidos de la programación en Matlab (CST y LST) se encuentran intermedios entre los resultados obtenidos de la simulación de Comsol (CST y LST), lo cual valida los resultados simulados en Matlab.

El elemento cuadrático triangular simulado en Comsol arroja resultados más aproximados al factor teórico que el lineal. Al contrario de lo que se encuentra en la programación en Matlab donde el elemento lineal arroja mejores resultados que el cuadrático.

Los elementos Q4 programado en Matlab y el Q4 simulado en Comsol mejoran los resultados al refinar el mallado utilizando una mayor cantidad de elementos. En el caso de Q4 programado en Matlab se hace más próximo hasta el punto de comportarse de forma similar al elemento Q8 simulado en Comsol.

Los elementos serendipitos cuadráticos pueden generar diferentes curvas de esfuerzos cuando se varía su interpolación o cuando el esfuerzo se calcula en los nodos o en el centroide del elemento; obteniendo unas curvas mejores para ciertos refinados o placas y otras para otro tipo de configuración.

El elemento Q8 simulado en Comsol no arroja una variación significativa ante el proceso de refinado y es el elemento de aproximación que genera los resultados más cercanos al factor teórico.

El elemento Q8 programado en Matlab (con integración reducida y esfuerzos en los nodos) presenta resultados inferiores a los simulados por el elemento cuadrático de Comsol en placas con arista de tamaño uniforme, sin embargo, para los refinados finos, la curva es más aproximada al factor teórico y mejor que la generada por Comsol.

El comportamiento de los resultados obtenidos con Matlab es muy similar a los de Comsol, encontrándose ambas curvas de Matlab contenidas entre las de Comsol para elementos triangulares, lo cual valida el proceso realizado para el cálculo de los factores de concentración.

Para placas donde el esfuerzo es constante en todo el dominio, alcanzar la convergencia requiere una menor cantidad de elementos que para geometrías más complicadas.

Cuando se hace un refinamiento en las cercanía de los concentradores, las curvas a cierta cantidad de elementos presentan un cambio de tendencia (que se puede representar como un escalón) que mejora el resultado haciéndolo más próximo al factor teórico.

La selección del tipo de elemento de análisis del mallado incide directamente en la solución final del problema discreto, donde elementos de orden superior obtienen una mejor aproximación a la respuesta real que los elementos lineales; por este motivo se pone en consideración el estudio de problemas de elasticidad para elementos cúbicos, cuárticos y quinticos.

También se puede profundizar en la integración de la matriz de rigidez, haciendo comparativos entre elementos integrados completamente y elementos con integración reducida hasta la mínima cantidad de puntos de Gauss permitidos; inclusive, elementos integrados selectivamente.

Configuraciones de mallas con tipos de elementos combinados (triangulares con cuadráticos) prácticamente son inexistentes, ya que son muy escasos los programas computacionales que lo permiten hacer. El desarrollo de este tipo de mallados, con elementos de transición y funciones de forma especiales para estos nodos exige un estudio detallado.

REFERENCIAS

- [1]. Celigüeta Juan T, "Método de los elementos finitos para análisis estructural". Cuarta edición. Tecnum. 2011.
- [2]. Daryl Logan, "A first course in the Finite Element Method". Cengage learning 2012.
- [3]. Vanegas Libardo, (19/11/2012). "Carga estática simple". Disponible en: <http://blog.utp.edu.co/ivanegas/files/2011/08/Cap3.pdf>, (29/05/2013).
- [4]. Beer Ferdinand, Johnston Russell, "Mecánica de materiales". Quinta edición. McGraw-Hill México 2009.
- [5]. González Héctor Eduardo. Determinación del factor de concentración de esfuerzos en una placa con múltiples concentradores de esfuerzo mediante Algor. Escuela de Ingeniería, Universidad de las Américas Puebla, México 2003.
- [6]. Pilkey, Walter D., Deborah F. "Peterson's Stress Concentration Factors". Third edition. Wiley Inc, 2008.
- [6]. Norton, Robert L. "Diseño de máquinas un enfoque integrado". Cuarta

- edición. Prentice hall, México 2011.
- [7]. Hughes, Thomas “The Finite Element Method”. Prentice Hall, United Stated.1987.
- [8]. Kattan Peter I, “Matlab guide to finite elements an interactive approach”. segunda edición, Springer 2008.
- [9]. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. “El método de los elementos finitos formulación básica y problemas lineales”. Volumen 1, Cuarta edición, Mc Graw-Hill, España. 1994.
- [10]. Chavez Eduardo W. V., Minguez Roberto. “Mecánica computacional en la ingeniería con aplicaciones en Matlab”. Universidad de Castilla-la Mancha, España 2010.
- [11] Kratzig Wilfried B.,Zhang Jian-Wu.1994. A simple four-node quadrilateral finite element for plates. Journal of computational and applied mathematics. Vol 50. 361-373.
- [12] Tenchev Rosen T. 1998. A study of accuracy of some FEM stress recovery schemes for 2D stress concentration problems. Finite Elements in analysis and design. Vol 29. 105-119.
- [13] Colberg O Poul .1999. Evaluation of triangular plate elements in rigid-plastic finite element analysis of reinforced concrete. Computer methods in applied mechanics and engineering. Vol 179. 1-17.
- [14] Kikuchi Fumio, Okabe Masayuki, Fujio Hidehiro. 1998. Modification of the 8-node serendipity element. Computer methods in applied mechanics and engineering. . Vol 179. 91-109.
- [15] Sadek Edward A. 1998. Some serendipity finite elements for the analysis of laminated plates. Computer & structures. Vol 69. 37-51.



Juan Sebastian Clavijo Gonzalez, nació el 15 de marzo de 1990 en Pereira Risaralda, Colombia. Se graduó como Tecnólogo en Mantenimiento electrónico e instrumentación industrial en marzo de 2009 en el SENA. El 17 de Julio de 2.015 en la Universidad Tecnológica de Pereira consiguió su título de Ingeniero Mecánico. Actualmente trabaja como ingeniero de mantenimiento en un proyecto de Dupont en Ternium Colombia.



César Daniel Montoya Osorio, nació en Pereira-Risaralda, Colombia, el 20 de Mayo de 1991. Se graduó en 2015 en la Universidad Tecnológica de Pereira como Ingeniero Mecánico. Ha participado en proyectos de desmonte de maquinaria industrial.



Luis Carlos Flórez García, nació en Pereira, Risaralda, el 17 de Mayo de 1978. Egresado del Colegio Calasanz de Pereira e Ingeniero Mecánico de la Universidad Tecnológica de Pereira, master en Ingeniería Mecánica de la Universidad de los Andes en Bogotá. Actualmente es estudiante de doctorado de la Universidad Politécnica de Cataluña en Ingeniería Mecánica, Fluidos y Aeronáutica. Ha trabajado para la Universidad de los Andes. Se ha desempeñado como ingeniero de mantenimiento y asesor para diferentes empresas. Actualmente es docente de planta de la Universidad Tecnológica de Pereira en la facultad de Ingeniería Mecánica, investigador de equipos interdisciplinarios y pertenece a diferentes grupos de investigación.