

Métodos para determinar el factor de intensidad de esfuerzos¹

Methods to determine the stress intensity factor

Métodos para determinar o fator de intensidade de esforços

J. A. Grajales y L. V. Vanegas

Recibido Agosto 22 de 2015 – Aceptado Febrero 19 de 2016

Resumen— En este trabajo se presenta una breve revisión de los métodos existentes para determinar el factor de intensidad de esfuerzos. Se presentan algunos aspectos históricos de la mecánica de fractura. Luego se exponen algunos de los métodos clasificándolos en tres grupos: métodos analíticos, de elementos finitos y experimentales. Para cada grupo se presentan algunos métodos, su desarrollo y características principales, incluyendo algunas ventajas, desventajas y restricciones. Se evidencian las razones de la comunidad científica de avanzar en la aplicación de los elementos finitos, debido a su enorme versatilidad, y se aprecia el enorme esfuerzo que implica aprender, dominar y aplicar cualquiera de los métodos.

Palabras Clave— factor de intensidad de esfuerzos, mecánica de fractura, métodos analíticos, método de elementos finitos, métodos experimentales.

Abstract— This paper presents a brief review of the existing methods to determine the stress intensity factor. Some historical aspects of fracture mechanics are presented. Then some of the methods are described, classifying them into three groups: analytical, finite element, and experimental methods. For each method, its characteristics, advantages, disadvantages, and restrictions are discussed. The reasons for the scientific community to advance in the application of the finite element method, due to its great versatility, are evident. It is clear that learning, mastering, and applying any of the methods entails a great effort.

Key words— stress intensity factor, fracture mechanics, analytical methods, finite element method, experimental methods.

Resumo – Neste trabalho se apresenta uma breve revisão dos métodos existentes para determinar o fator de intensidade de esforços. Apresentam-se alguns aspectos históricos da mecânica de fratura. Logo se expõem alguns métodos classificando-os em três grupos: métodos analíticos, de elementos finitos e experimentais. Para cada grupo apresentam-se alguns métodos, seu desenvolvimento, e características principais, incluindo algumas vantagens, desvantagens e restrições. Evidenciam-se as razões da comunidade científica de avançar na aplicação dos elementos finitos, devido a sua enorme versatilidade e se aprecia o enorme esforço que implica aprender, dominar e aplicar qualquer dos métodos.

Palavras chave: fator de intensidade de esforços, mecânica de fratura, métodos científicos, método de elementos finitos, método de elementos experimentais.

I. INTRODUCCIÓN

EN el desarrollo de estructuras y elementos de máquinas se desea siempre garantizar el adecuado funcionamiento de todas las piezas. Es por esto que se desarrollan metodologías de diseño con las cuales se pueda calcular un valor de carga a aplicar, que se pueda comparar con un valor límite (definido por el material y la geometría), asegurando el diseño realizado.

A principios del siglo pasado se pensaba que el diseño basado en los esfuerzos de operación de los elementos, comparado con los esfuerzos límite de los materiales, era condición suficiente para su operación satisfactoria. Sin embargo, han ocurrido diversos accidentes (fallas prematuras) con elementos que se pensaban bien diseñados. Este es el caso del buque Titanic (1912), un tanque de melaza en Boston que estalló por la presión de la melaza (1919),

¹Este trabajo es producto del proyecto de investigación “Modelado de crecimiento de grietas por fatiga por ludimiento”, perteneciente al grupo de investigación Procesos de Manufactura y Diseño de Máquinas, vinculado a la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira.

J.A. Grajales, Ingeniero Mecánico, Candidato a M.Sc. en Ingeniería Mecánica y Profesor Catedrático, Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia); correo e.: ntc1687@hotmail.com.

L.V. Vanegas, Ingeniero Mecánico, M.Sc., Ph.D., Profesor Titular de la Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia); correo e.: lvanegas@utp.edu.co.

muchos barcos de la época de la 2^{da} guerra mundial que se partieron en dos (1940s) y tres aviones Comet británicos que se desintegraron en el aire en menos de un año (1953-1954). En muchos casos, las fallas ocurrían en presencia de pequeñas deformaciones y poca fluencia en las zonas de falla, es decir, tenían comportamiento frágil [1]. Éstos y muchos otros incidentes motivaron el desarrollo de lo que hoy se conoce como mecánica de fractura [2]. A manera de ejemplo, la Fig. 1 muestra una placa plana agrietada de material dúctil sometida a un esfuerzo de tracción. En muchos casos, la fractura total puede ocurrir con una pequeñísima deformación plástica, la cual se presenta en las cercanías a la punta de la grieta. Por tanto, el material parece tener una fractura frágil.

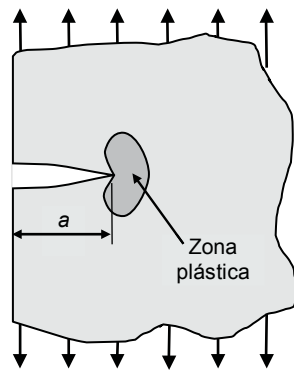


Fig. 1. Placa plana con grieta de borde de tamaño a sometida a un esfuerzo remoto σ .

En la mecánica de fractura se trata de explicar el comportamiento de un material *agrietado* cuando está sometido a esfuerzos. Se pretende explicar por qué un material, en aparentemente buenas condiciones, presenta falla prematura en condiciones de carga inferiores a los límites de fluencia y rotura, reconociendo que todos los materiales tienen pequeñas imperfecciones que actúan como grietas, modificando la distribución de los esfuerzos [3]. Es así que aparece un nuevo criterio de falla que considera los defectos mecánicos, presentes en los materiales de ingeniería.

La mecánica de fractura muestra que los parámetros tenacidad del material, tamaño de grieta y nivel de esfuerzo pueden ser relacionados para predecir la posibilidad de una fractura frágil [3].

El parámetro que caracteriza los esfuerzos en la zona que rodea la punta (o mejor, el frente) de una grieta se denomina *factor de intensidad de esfuerzos* K y depende de la geometría de la pieza y del caso de carga al que está sometida [1,4]. La determinación de este parámetro tiene un nivel de complejidad elevado y ha sido abordado en las últimas cinco décadas por diferentes investigadores, siguiendo diferentes caminos para tratar de facilitar el proceso.

En el presente documento se pretende realizar una recopilación de algunos de los métodos que se utilizan

para la determinación del factor de intensidad de esfuerzos en diferentes piezas y solicitaciones de carga, siguiendo la mayor clasificación que los agrupa: métodos analíticos, métodos numéricos (como el análisis de elementos finitos) y métodos experimentales.

Por otro lado, [5] clasifica los métodos de acuerdo a su complejidad y tiempo requerido para su aplicación (Tabla I). Para geometrías sencillas, la primera opción es recurrir a los compendios [6,7]. Los métodos de la clase II son relativamente simples, proporcionan una estimación rápida de K y aportan una aproximación de los principios de la mecánica de fractura; en [5] se presenta una descripción de estos métodos.

TABLA I
ALGUNOS MÉTODOS PARA EVALUAR K [5]

Clase I	Clase II	Clase III
Compendios	Superposición M	Método de colocación
	Concentrador de esfuerzos	Método de elementos finitos (FEM)
	Distribución local de esfuerzos	Método de elementos finitos extendido (X-FEM)
	Funciones de Green	Método de elementos de contorno (BEM)
	Funciones de peso	Método de colocación discontinua
	Composición de contornos	Método de las funciones de borde
		Método de fuerzas másicas

Los métodos de la clase III son más complejos y requieren de una solución numérica. El método de colocación fue popular en los años 60, pero en los años 70 comenzó a dominar el Método de Elementos Finitos (FEM) [8-14], debido a su versatilidad y simplicidad. Hoy en día se está usando mucho la variante X-FEM, la cual simplifica el mallado (especialmente para problemas de crecimiento de grieta) [15].

El método de elementos de contorno (BEM) surgió como una poderosa alternativa por sus menores exigencias en cuanto a discretización. El método de las fuerzas másicas y el de las funciones de borde tienen ciertas similitudes al ser comparadas con BEM. El método de las líneas aplica técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. [16]

II. CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

Los primeros resultados que evidenciaban el efecto de la concentración de esfuerzos en grietas fueron obtenidos por Inglis [17], después de analizar el efecto de la presencia de agujeros elípticos de longitud $2a$ y ancho $2b$ en placas planas (Fig. 2), con la condición de que el agujero no es influenciado por las condiciones de contorno (la placa es mucho más grande que el agujero). Para estas condiciones, el valor del esfuerzo en el extremo del eje mayor está dado por

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + \frac{2a}{b} \right), \quad (1)$$

donde σ es el esfuerzo remoto aplicado. Si esta ecuación es llevada al extremo para simular una grieta, es decir, si el eje menor de la elipse, b , tiende a cero, el valor del esfuerzo se vuelve infinito.

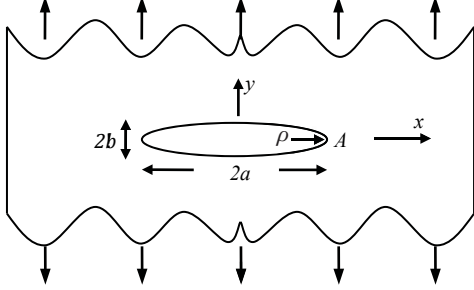


Fig. 2. Placa infinita con agujero elíptico pasante.

Este resultado causó preocupación en la comunidad científica, dado que significaba que en la presencia de grietas, hasta un esfuerzo infinitesimal lograría dañar cualquier material. Motivado por esto, Griffith [18] desarrolla una teoría de la fractura basada en energía en vez de la concentración de esfuerzos [17]; es así que en 1921 estableció la teoría que sustenta y dio origen a la mecánica de fractura: un crecimiento de grieta puede ocurrir si la energía requerida para formar un incremento de grieta da puede ser justamente liberada por el sistema, es decir, si el proceso origina una disminución de la energía total o ésta permanece constante. A partir de la relación entre el cambio en la energía superficial del cuerpo (propagación de la grieta) y la energía disponible, Griffith obtiene expresiones para el esfuerzo de rotura para una placa infinita con una grieta pasante central de tamaño $2a$:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{E' \gamma_s}{a}}, \quad (2)$$

donde:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{deformación plana}) \\ E' &= E \quad (\text{esfuerzo plano}) \end{aligned} \quad (3)$$

γ_s es la energía de superficie libre por unidad de área de superficie, E es el módulo de elasticidad y ν es la relación de Poisson. Esta expresión resultó ser aplicable a materiales frágiles, mas no correspondía al comportamiento de los metales. En 1952, Orowan [19] modificó la expresión de Griffith, para incluir el comportamiento plástico del material (fluencia):

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{E' (\gamma_s + \gamma_p)}{a}}, \quad (4)$$

donde γ_p es el trabajo de deformación plástica por unidad de área de superficie creada ($\gamma_p \gg \gamma_s$ en metales).

Sin embargo, fue Irwin, quien a partir de la teoría de la elasticidad, obtuvo expresiones para los esfuerzos en la cercanía de una grieta, en coordenadas polares (r, θ) con centro en el frente de grieta:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), \quad (5)$$

donde r es la distancia del punto de análisis a la punta de la grieta, θ es el ángulo que forma r con respecto al eje x (el cual va en la dirección de la grieta) y f_{ij} es una función. Es así que se introduce el término *factor de intensidad de esfuerzos* K_I (el subíndice indica el modo de deformación de grieta: modo I o modo de apertura o tracción, que es el más común en la práctica y por ende es el que más atención ha recibido). El factor K depende de la geometría del elemento y del tipo y magnitud de la carga y está dado por:

$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (6)$$

donde β es un parámetro que depende de la geometría del elemento y de la grieta, σ es el esfuerzo remoto aplicado y a es la longitud de una grieta de borde o la mitad de la longitud de una grieta central.

Prontamente se reconoce que el factor de intensidad de esfuerzos es el factor que caracteriza unívocamente el estado de esfuerzos en el frente de una grieta, dado por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{\theta}{2} \frac{3\theta}{2} + \dots \\ 1 + \frac{\theta}{2} \frac{3\theta}{2} + \dots \\ \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

donde σ y τ son los esfuerzos normal y cortante respectivamente, en el punto de análisis, y las direcciones x y y se muestran en la Fig. 2. Si K alcanza cierto valor crítico (la tenacidad a la fractura del material K_c), ocurre fractura súbita. Se da inicio entonces a la mecánica de fractura elástica lineal (LEFM, por sus siglas en inglés). Crece entonces la necesidad de tener expresiones para K para elementos en diversas condiciones geométricas y de carga. Como se dijo, los métodos pueden clasificarse como analíticos, numéricos y experimentales. Los métodos analíticos tienen utilidad para casos en los que la geometría es relativamente sencilla. Para casos con geometrías o sistemas de esfuerzos complejos, los métodos de elementos finitos superan a los analíticos, por su versatilidad; por tanto, este trabajo se concentra principalmente en los métodos de elementos finitos. Las bases para determinar K se pueden encontrar en la literatura [20,21].

III. MÉTODOS ANALÍTICOS

Los métodos analíticos son importantes, ya que han sido la base de la mecánica de fractura y suministran las ecuaciones

para calcular los campos de esfuerzos y desplazamientos [22]. En estos métodos, se trata de determinar las denominadas *funciones de esfuerzo de Airy* para hallar K .

Westergaard realizó uno de los primeros acercamientos al problema [1], utilizando las funciones de Airy, en las cuales se dice que, para que se cumplan las ecuaciones de equilibrio, se tiene que cumplir la ecuación de compatibilidad:

$$\frac{d^4\psi}{dx^4} + 2\frac{d^4\psi}{dx^2dy^2} + \frac{d^4\psi}{dy^4} = 0, \quad (8)$$

o

$$\nabla^2(\nabla^2\psi) = 0, \quad (9)$$

La función se llama la función de esfuerzo de Airy. A partir de ésta se pueden determinar los valores de esfuerzos y deformaciones mediante derivaciones parciales. Por ejemplo, para esfuerzo plano:

$$\sigma_x = \frac{d^2\psi}{dy^2}, \quad \sigma_y = \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{d^2\psi}{dxdy}. \quad (10)$$

Es así que se busca entonces una función de Airy que cumpla con las ecuaciones para poder hallar los valores de los esfuerzos. Esta función de esfuerzos se estima sobre la base de resultados experimentales o conocimiento previo, para cada problema en particular [17].

En 1957, *Wigglesworth* propone una solución analítica para una placa semi-infinita con grieta de borde en presencia de una presión constante en las caras de la grieta o de un esfuerzo remoto [23]. En esta se calculan los coeficientes de una expansión en serie de la distribución de esfuerzos alrededor de la grieta (expansión en serie con base en las funciones de Airy). *Wigglesworth* mostró que los coeficientes A_n y B_n se pueden determinar a partir de la expansión asintótica de una función para números enteros grandes :

$$q(m) = -2h(1) \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(m/2)}{\Gamma(m/2 + 3/2)} h(m), \quad (11)$$

siendo

$$\log(h(m)) = \frac{m}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(V)}{m^2 + V^2} dV, \quad (12)$$

$$\psi(V) = \log[1/(1 - V^2 \csc h^2(\pi V/2))]. \quad (13)$$

A partir de la relación entre las expansiones asintóticas del $\log(h(m))$ y de $h(m)$ se obtienen valores de \overline{A}_n y \overline{B}_n , que luego se operan para obtener de forma iterativa mejores valores de \overline{A}_n y \overline{B}_n , los cuales se utilizan para calcular \overline{A}_n y \overline{B}_n que son los coeficientes usados en la expansión en series de la distribución de esfuerzos [23].

Alrededor de 1965 se propone una solución simple para

la determinación de los parámetros de la expansión en serie de la distribución de esfuerzos y utilizando el "*Boundary Collocation Method*" (en español, método de colocación en la frontera) [23,24]. Para darle uso a la serie infinita, resultado de la función de esfuerzo de Airy, ésta debe ser truncada en el N -ésimo término (valor que debe ser correctamente seleccionado). Es así que se obtienen $2N$ coeficientes desconocidos, los cuales se determinan igualando las expresiones de esfuerzo y deformación, obtenidas a partir de la serie, con las condiciones de frontera específicamente seleccionadas, en un cierto número de puntos de colocación ubicados sobre dicha frontera. Para un número de puntos de colocación $N + 1$ se obtendría un sistema de $2(N + 1)$ ecuaciones que permiten calcular $2(N + 1)$ coeficientes. Para reducir el gasto computacional, se puede seleccionar un gran número de puntos de colocación, que permita resolver luego el sistema sobre determinado mediante el uso de mínimos cuadrados. A modo de ejemplo, en la Fig. 3 se presenta la ubicación de algunos puntos de colocación en un problema de grieta de borde en una placa finita, para los cuales se tendrían entonces las siguientes condiciones de frontera:

Si $x = 0$, entonces $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$.

Si $y = H$, entonces $\sigma_y = s$, $\tau_{xy} = 0$.

Si $x = W$, entonces $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$.

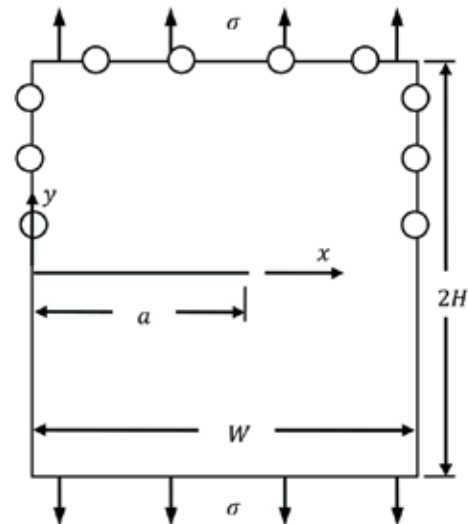


Fig. 3. Placa finita con grieta de borde.

Otra herramienta fuerte para la determinación de factores de intensidad de esfuerzos es el *principio de superposición*, el cual permite encontrar soluciones de casos relativamente complejos, a partir de resultados conocidos de configuraciones sencillas (para los cuales se conozcan los valores mediante tablas o expresiones). Si el material en las condiciones requeridas tiene comportamiento elástico-lineal, las componentes del esfuerzo (normal en cada dirección, cortante en cada dirección), deformación y desplazamiento (en cada dirección) son sumas. De igual forma los factores de intensidad de esfuerzos pueden ser sumados, siempre y cuando el modo de fractura en el que fueron calculados sea el mismo. Es decir:

$$K_I^{total} = K_I^a + K_I^b + K_I^c + \dots \quad (14)$$

Para entender el principio de superposición, considere el ejemplo de la Fig. 4, en la cual se cumple que:

$$K_I^a = K_I^b = 0 = K_I^c + K_I^d. \quad (15)$$

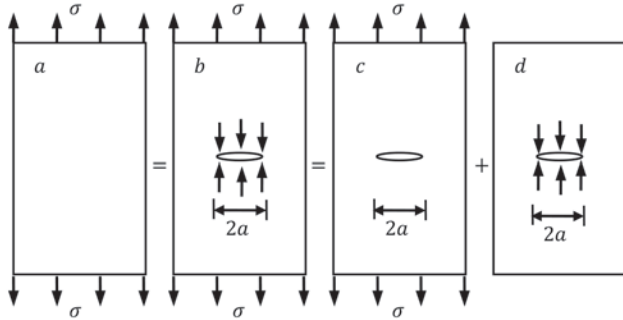


Fig. 4. Placa finita con grieta central.

Otro método analítico que ha sido propuesto se basa en distribuciones continuas de dislocaciones [25,26]. La grieta es representada por una discontinuidad de desplazamiento que resulta de un arreglo de dislocaciones (ver [26]).

IV. MÉTODOS DE ELEMENTOS FINITOS

A. Introducción

Por la elevada complejidad matemática de los métodos analíticos y su reducida versatilidad (debido a la gran cantidad de simplificaciones requeridas, y a la necesidad de trabajar geometrías sencillas), se han desarrollado numerosos métodos numéricos. Algunos son: una técnica de mapeo de conformación (en inglés: conformal mapping technique), la cual fue usada por [27] para tratar el problema de una grieta que emana de un agujero. En [28], se desarrolla un procedimiento de mapeo-colocación (mapping-collocation procedure) para analizar una placa ortotrópica, la cual es una combinación de la técnica de mapeo de conformación y del método de colocación en la frontera, ya mencionados.

Sin embargo, el método más usado para determinar K es el método de elementos finitos (FEM) y sus variantes. Tras el establecimiento de las bases de estos métodos, alrededor de 1970, se extendió su aplicación a la LEFM y creció la cantidad de métodos para mejorar su precisión y eficiencia.

Algunos programas computacionales que usan FEM son Ansys [29], Abaqus [30], Samcef [31], Morfeo/Crack [32] y StressCheck [33]. En general, estos programas permiten determinar los factores de intensidad de esfuerzos y predecir el crecimiento de grietas por fatiga usando funciones de enriquecimiento. Estos programas han sido usados, por ejemplo, por [34-39].

El resto de esta sección se concentra en las diferentes variantes usadas para implementar el FEM.

B. Refinamiento de malla

El primer acercamiento del FEM a la LEFM fue la *aplicación directa (con refinamiento de malla)* del análisis sobre un elemento agrietado. Conociendo que la distribución de esfuerzos en la cercanía del frente de grieta es la zona de importancia para la mecánica de fractura, se optó por utilizar mallas muy refinadas en esta zona. De esta forma el planteamiento del análisis de elementos finitos permanecía sin modificaciones, pero presentaba una muy baja eficiencia computacional, ya que el mallado tiene que refinarse mucho.

C. Elementos singulares

Para evitar el refinado excesivo de la malla se han propuesto diversas soluciones, una de las primeras soluciones implica el uso de *elementos singulares*, los cuales reemplazan los elementos normalmente utilizados en elementos finitos; de éstos se reconocen cinco tipos: *elementos con funciones de forma especiales, híbridos, basados en transformaciones geométricas, enriquecidos y elementos de transición* [40-42]. Cada tipo de elemento singular presenta sus ventajas y desventajas que los hacen preferibles en determinadas condiciones y problemas (ver [12,43,44]). Por ejemplo, los elementos híbridos ofrecen una mayor precisión, pero los elementos basados en transformaciones geométricas (como los elementos tipo “quarter point”) son los más sencillos de implementar. Por ejemplo, [34] usan el método de elementos finitos con elementos singulares, para modelar una placa 2D mediante el software Ansys [29]. [37] determinan factores de intensidad de esfuerzos, usando Abaqus [30], para una pieza con una grieta de borde sometida a carga de modos I y II; se usan elementos singulares con nodos “quarter point”.

D. X-FEM

El método de los elementos finitos extendido (X-FEM, por sus siglas en inglés), propuesto por Belytschko y Black [45] y Moës [15], surgió como respuesta al análisis de propagación de la grieta, debido a que cada vez que crece la grieta se requeriría de un nuevo mallado, ya que ésta debe estar alineada con la topología de la discontinuidad. Se propuso un nuevo tipo de malla, donde los nodos pertenecientes a elementos intersecados por la ubicación geométrica de la grieta son “enriquecidos”, permitiendo el uso de una malla mucho más sencilla, que se extiende sobre la pieza supuesta sin grieta, y manteniendo la malla constante; así, se trata la grieta como una entidad geométrica independiente. Los nodos son “enriquecidos” mediante la adición de grados de libertad de manera que puedan representar la discontinuidad y mejorar la representación de la singularidad del extremo de grieta. Este enriquecimiento se puede realizar de dos formas diferentes: *enriquecimiento de extremo de grieta* (para los nodos del elemento donde se encuentra el frente de grieta, los cuales tienen 10 grados de libertad) y el *enriquecimiento Heaviside* (para los nodos de los demás elementos intersecados por la grieta, los cuales tienen 4 grados de libertad). En la Fig. 5 se muestra un ejemplo de un mallado en X-FEM y la representación de los nodos enriquecidos.

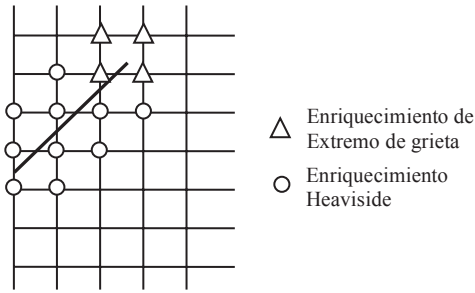


Fig. 5. Malla para X-FEM, con nodos enriquecidos.

La función Heaviside está dada por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & (x - x^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \\ -1, & (x - x^*) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \end{cases} \quad (16)$$

donde x es un punto del dominio, x^* es el punto más cercano sobre la grieta y \mathbf{e}_n es un vector normal a la grieta.

Con el fin de que uno de los grados de libertad calculados mediante X-FEM sea la solución física del desplazamiento nodal, se ha implementado [46-48] una variante llamada formulación “shifted”.

Otras soluciones propuestas para el FEM son la *superposición de malla y la sustitución local de malla* [9].

E. Métodos de extracción

Una vez hallada la distribución de esfuerzos y deformaciones alrededor de la grieta, es necesario calcular el valor del factor de intensidad de esfuerzos. Para esto se pueden aplicar diferentes *métodos de extracción*.

Los *métodos locales o directos* permiten realizar una estimación del factor de intensidad de esfuerzos *directamente* a partir de los resultados de esfuerzos y deformaciones obtenidos en el análisis de elementos finitos [16,49]; por tal motivo, estos métodos se usan casi siempre en combinación con elementos singulares. Uno de estos métodos propone el reemplazo de los valores calculados y conocidos de las ecuaciones de Irwin para los esfuerzos alrededor de una grieta (en coordenadas polares) para despejar el valor de K , obteniendo varios valores que permitan obtener la relación con la distancia al frente de grieta. Este método presenta muchas dificultades y sus resultados son generalmente poco confiables [49]. Hay formas de mejorar su exactitud como el refinamiento de la malla o el uso de elementos singulares, los cuales son la opción más apropiada y utilizada en conjunto con los métodos directos [16]. Existen otros métodos locales, entre los cuales los más utilizados son [16]: *extrapolación de desplazamientos y esfuerzos* [29, 34, 50], *técnica de correlación de desplazamientos* [12], *técnica de desplazamiento en los nodos “quarter-point”* [51], *método de las fuerzas nodales* [14] y *ajuste por mínimos cuadrados* [52].

Otro método que se apoya en el análisis de elementos finitos y que es comúnmente utilizado en la determinación de los factores de intensidad de esfuerzo es el *método de la función de peso* [4,16,23,53-55]. A partir de la distribución de esfuerzos en la pieza sin grieta, a lo largo de la línea donde ésta debería estar, el factor K se calcula como:

$$K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a w(s,a) \sigma_n(s) ds, \quad (17)$$

donde $\sigma_n(s)$ es el esfuerzo calculado en la pieza sin grieta (a lo largo de la zona donde debería estar la grieta), $w(s,a)$ es la función de peso, la cual es específica para cada problema y no depende de la distribución de esfuerzos, sino de la geometría del elemento. Una de las formas de determinar esta función de peso es a partir de la relación:

$$w(s,a) = \frac{E'}{K_{I_r}(a)} \frac{\partial V_r(s,a)}{\partial a}, \quad (18)$$

donde E' está dado por (3), el subíndice r se refiere a los casos de referencia, que deben ser evaluados. Se puede evaluar esta ecuación utilizando un par de perfiles de apertura de grieta (de longitudes ligeramente diferentes a y $a + da$) numéricamente definidos a partir del “*boundary collocation method*” y sus correspondientes expansiones en serie. Para minimizar los cálculos, normalmente en la literatura se utilizan métodos aproximados.

Además de los métodos de extracción locales o directos, para el cálculo de K existen también *métodos de extracción indirectos o energéticos* que se basan en la relación entre K y el contenido de energía elástica de la estructura [34,49]. La gran ventaja de estos métodos es que no se requiere un modelado preciso de la discontinuidad. En éstos, ciertas magnitudes energéticas se evalúan a partir de datos obtenidos en elementos alejados del frente de la grieta. Sus desventajas son la dificultad de aislar las contribuciones de los diferentes modos de apertura de grieta (si en el problema existe más de un modo) y su uso para problemas 3D. Algunos métodos energéticos son *la integral de contorno J*, *la integral de contorno en modo mixto* y *la integral de dominio*. [56]

La aplicación de la *integral de contorno J* (propuesta por Rice [57]) permite la correcta estimación de las deformaciones en la parte más cercana a la grieta. En un sólido homogéneo, elástico, no necesariamente lineal, en ausencia de fuerzas por unidad de volumen y contorno de la entalla libre de fuerzas por unidad de superficie aplicadas [16,17,58,59], la integral J se define como (Fig. 6):

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - T \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma \right), \quad (19)$$

donde Γ es cualquier camino o recorrido alrededor del frente de grieta, desde una cara de ella hasta la otra en sentido antihorario, T es el vector de tracciones en el contorno Γ y u es el vector de desplazamientos. La densidad de energía de deformación W para el caso elástico se define como:

$$W = \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (20)$$

donde ε_{ij} es el tensor de deformaciones infinitesimales.

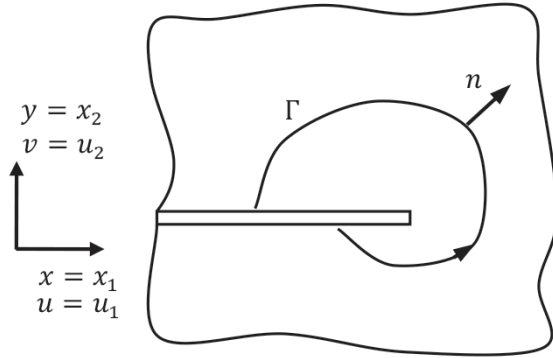


Fig. 6. Representación del contorno, integral J .

A partir de este resultado, si se tienen condiciones en las cuales pueda ser aplicada la mecánica de fractura elástica lineal, es decir, si se tiene una zona de deformación plástica lo suficientemente pequeña, se puede demostrar que:

$$J = \frac{K_I^2}{E'}. \quad (21)$$

Una de las mayores ventajas del cálculo de la integral J es que su valor no depende del camino tomado para la integración, por lo que se puede hacer uso de un camino un poco más alejado de la grieta, donde la distribución de esfuerzos es calculada por los elementos finitos con una mayor precisión [16].

Para la solución de problemas más generales, y en condiciones donde la integral J no pueda ser aplicada (problemas dinámicos, en 3D, con efectos térmicos, fuerzas por unidad de volumen, etc. o donde la integral de contorno no es independiente del camino escogido), se utiliza una formulación diferente denominada *integral de dominio* [58,59]. Esta integral de dominio, propuesta por Li *et al.* [60], es superior por su facilidad de cómputo y mayor precisión (especialmente en problemas 3D) y está definida como:

$$J = \int_{A^*} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{1i} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_1} dA, \quad (22)$$

donde dA es un diferencial de área, A^* está definido de acuerdo a la Fig. 7, y la función q_1 es:

$$q_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_1 \\ 1, & \text{si } (x_1, x_2) \in \Gamma_3 \end{cases}. \quad (23)$$

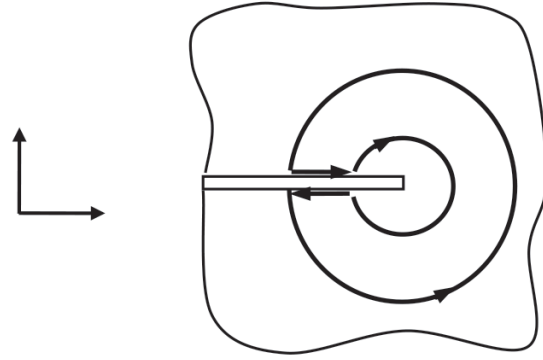


Fig. 7. Representación del área, integral de dominio.

Además de las integrales de contorno y de dominio, otros métodos de extracción energéticos o indirectos son: *diferencias finitas*, *funciones de extracción*, *derivada de la matriz de rigidez* y *cierre virtual de grieta* [9]. A manera de ejemplo, [36] usan FEM para calcular mediante Abaqus [30] factores de intensidad de esfuerzos de una unión simple agrietada (con tornillo y con tornillo más adhesivo) con elementos singulares quarter point, y extraen los valores mediante el método de la integral de contorno. [38] determinan factores de intensidad de esfuerzos, usando Abaqus [30] y la integral J para grietas emanando de agujeros elípticos en placas planas.

V. MÉTODOS EXPERIMENTALES

A. Galgas extensiométricas

Una de las primeras técnicas experimentales desarrolladas para la medición de los factores de intensidad de esfuerzos se basa en el uso de *galgas extensiométricas*, con el objetivo de determinar las deformaciones en la distribución de esfuerzos alrededor del frente de grieta [3,61,62].

Los métodos que utilizan galgas usan formulaciones analíticas que determinan las deformaciones en el área cercana al frente de grieta, por ejemplo, en [61] se utiliza la expresión desarrollada por Irwin:

$$\varepsilon_{rr}(r, \theta) = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} f(\theta), \quad (24)$$

donde $f(\theta)$ es una función que depende del ángulo θ que no solamente brinda la ubicación en coordenadas polares de la galga, sino que también es su orientación. Como en este caso particular se utiliza una galga de tipo paralela, se usa una corrección del gradiente de deformación mediante integración.

En otros casos, por ejemplo [3,62], se utilizan las ecuaciones generalizadas de Westergaard, las cuales están basadas en las expansiones en serie de las funciones de Airy. De esta forma se obtienen expresiones para las deformaciones en términos de coeficientes A_i, B_i (los diferentes autores, como puede verse en [3,62], utilizan expresiones de diferentes

extensiones), permitiendo calcular el factor de intensidad de esfuerzos como:

$$K_I = \sqrt{2\pi A_0}. \quad (25)$$

En general, los métodos que utilizan galgas se basan en la teoría de Dally y Berger para seleccionar una zona sobre la cual ubicar las galgas alrededor del frente de grieta, dividiendo el área en tres partes (Fig. 8). La zona I se considera demasiado cercana a la grieta y puede inducir errores debido a la zona de deformación plástica, y la zona III es demasiado alejada, por lo que la representación en serie requeriría de muchos coeficientes, razones por las cuales se elige la zona II para la ubicación de los elementos de medida [62].

Dado que todas las ecuaciones utilizadas en estos métodos dependen de los ángulos de ubicación de las galgas y su orientación, una correcta selección de los mismos permite la simplificación de los cálculos, e inclusive la reducción del número de mediciones [3,61,62]. En estos métodos generalmente se utiliza la probeta compacta de tensión, similar a la utilizada para los ensayos de determinación de la tenacidad a la fractura K_{Ic} .

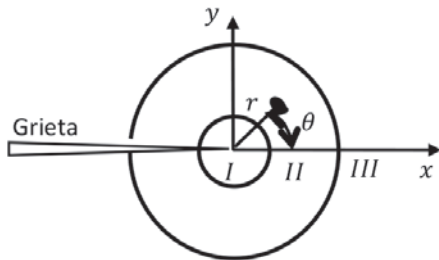


Fig. 8. Zonas alrededor del frente de grieta.

B. Método fotoelástico

Otros métodos experimentales se basan en las propiedades de ciertos materiales transparentes para desviar la luz cuando se encuentran sometidos a esfuerzos. Uno de ellos se denomina *fotoelasticidad*.

La fotoelasticidad es una propiedad única de algunos materiales transparentes, en particular ciertos plásticos [63]. Debido a esta propiedad, un rayo de luz que incide en un material fotoelástico sometido a condiciones de esfuerzo, en una de las direcciones de los esfuerzos principales, es dividido en dos componentes, cada una con un plano de vibración paralelo a los otros dos planos de esfuerzos principales, y velocidades diferentes que dependen de la magnitud de dichos esfuerzos. Debido a las diferentes velocidades, las dos componentes salen del material con un retardo relativo entre ellas, luego son capturadas mediante un polariscopio fotoelástico, para permitirles entrar en interferencia óptica. De acuerdo al retardo relativo, medido en términos de ciclos, se producen zonas de alta intensidad lumínica o zonas de interferencia destructiva, generándose

los patrones característicos de este tipo de análisis, llamados patrones isocromáticos.

El patrón isocromático se relaciona con el sistema de esfuerzos mediante la expresión [63,64]:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{f}{t} \bar{N}, \quad (26)$$

donde f es el coeficiente esfuerzo-óptico, que depende del material y la longitud de onda de la luz utilizada, t es el espesor del modelo y N es el retardo relativo de los rayos que forman el patrón. Este retardo se puede medir contando el número de cambios en un punto de la pieza, mientras se aplica la carga paulatinamente, entre una franja oscura y una franja clara (cada cambio de claro a oscuro y oscuro a claro cuenta como 1/2).

Dependiendo de la pieza y las condiciones de carga, el patrón isocromático puede no ser tan claro o preciso, por lo que se puede realizar una multiplicación de franjas, que consiste en hacer que el rayo de luz pase en varias ocasiones por la pieza, obteniendo mayor cantidad de franjas que así podrán brindar más y mejor información [63]. Aprovechando esta propiedad se utiliza una variedad del método en materiales no transparentes, como los metales de ingeniería. A una pieza de un material no transparente se la pinta de un color que permita reflejar la luz y se le cubre con una capa de material transparente con propiedades fotoelásticas, permitiendo así ver las condiciones de esfuerzo, en especial para piezas que ya están en uso en alguna estructura o máquina.

C. Método de las cáusticas

Otro de los métodos que aprovechan las propiedades de los materiales transparentes es el *método de las cáusticas* [64-66], en el cual se aprovecha el hecho de que la presencia de grandes esfuerzos (como es el caso del frente de grieta) provocan un cambio en el ancho de la pieza y en las propiedades refractivas del material, por lo que la luz que pasa por esa zona se ve desviada, generando figuras y patrones que responden directamente a la geometría de la figura y las condiciones de carga. Las sombras que se generan y sus dimensiones se pueden calcular para cada elemento y condición de carga.

VI. CONCLUSIONES

En esta breve revisión de los métodos para la determinación de los factores de intensidad de esfuerzos, se puede apreciar la variedad de opciones y métodos existentes para enfrentar dicho problema (Fig. 9 y 10). En el pasado, fueron fundamentales los métodos analíticos, ya que éstos permitieron obtener expresiones para K para diversos casos, relativamente sencillos, y entender mejor la mecánica de la fractura. Sin embargo, los métodos analíticos tienden a ser difíciles de usar para casos relativamente complejos. Se hizo evidente que en la actualidad hay un gran énfasis

en la utilización de métodos de elementos finitos, debido a su gran versatilidad, a que no requieren fundamentos matemáticos tan profundos como los métodos analíticos y a que con las variantes propuestas, se pueden lograr resultados rápidos y de manera sencilla y exacta. Por otro lado, la aplicación de métodos experimentales es de gran utilidad como comprobación de los resultados obtenidos mediante algún otro método, en particular porque están altamente condicionados y su aplicación es muy laboriosa. Se hizo evidente que la aplicación de cualquiera de los métodos aquí presentados requiere de un estudio dedicado y minucioso, para poder ser utilizado adecuadamente.

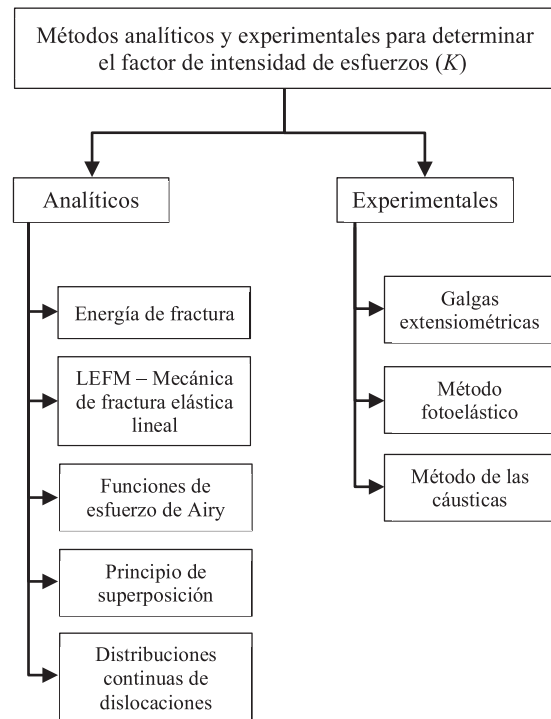


Fig. 9. Métodos analíticos y experimentales para determinar el factor de intensidad de esfuerzos.

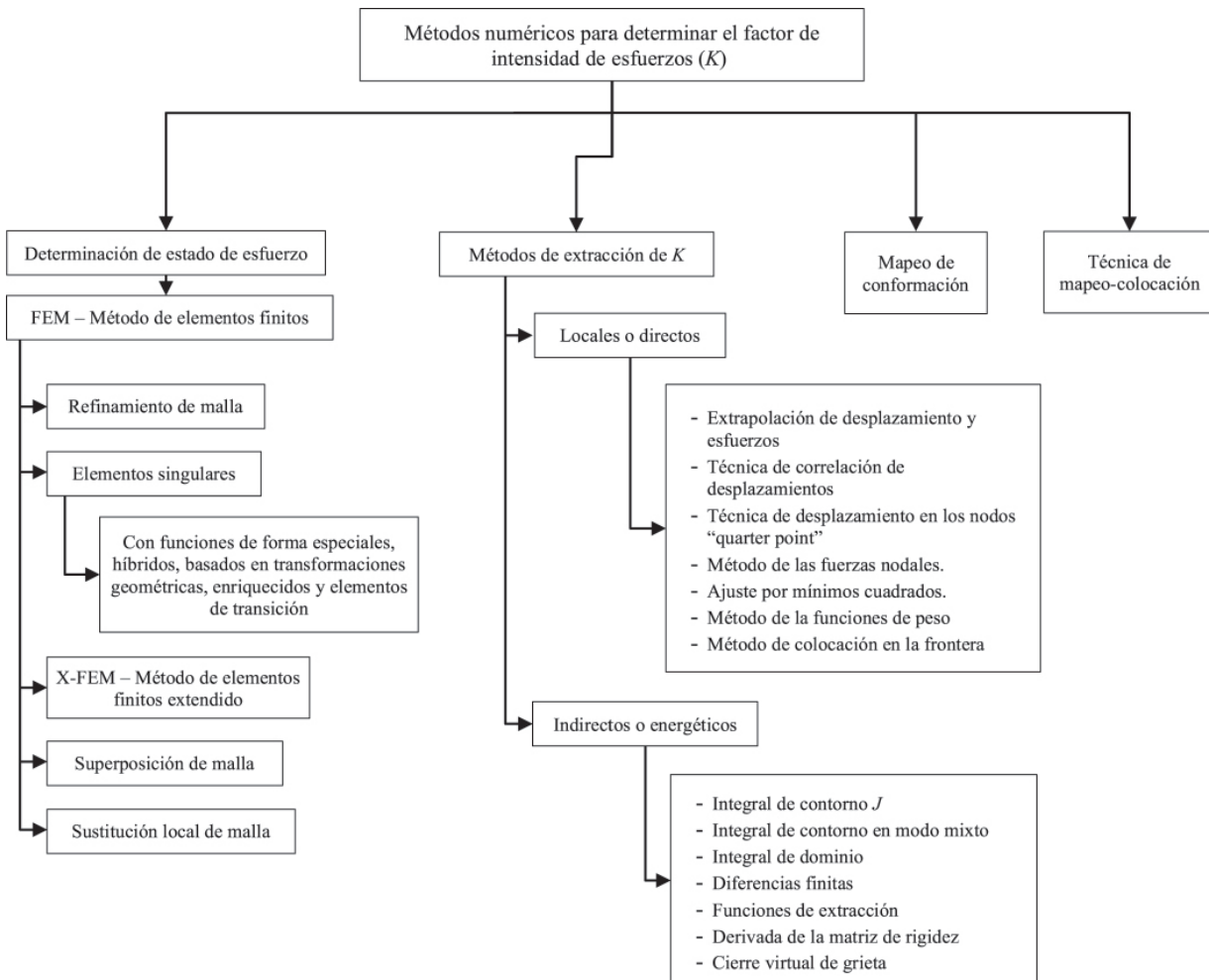


Fig. 10. Métodos numéricos para determinar el factor de intensidad de esfuerzos.

REFERENCIAS

- [1] R. W. Hertzberg, *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*. U.S.A.: Jon Wiley & Sons, 1996.
- [2] W. Schütz, "A history of fatigue," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 54, pp.263-300, 1996.
- [3] L. Parnas, Ö. Bilir, E. Tezcan, "Strain gage methods for measurement of opening mode stress intensity factor," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 55, pp. 485-492, 1996.
- [4] T. Fett, *Stress Intensity Factors and Weight Functions for Special Crack Problems*. Karlsruhe: Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, 1998.
- [5] M. Aliabadi y D. Rooke, *Numerical Fracture Mechanics - Computational Mechanics Publications: Solid Mechanics and its Applications*. UK: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] H. Tada, P. Paris y G. Irwin, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. 2a edición, St. Louis, Missouri: Paris Productions, Inc., 1985.
- [7] Y. Murakami, *Stress Intensity Factors Handbook*. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- [8] V. Watwood, Jr., "The finite element method for prediction of crack behaviour," *Nuclear Eng. and Des.*, vol. 11, pp. 323-332, 1969.
- [9] J. R. Dixon y L. P. Pook, "Stress intensity factors calculated generally by the finite element technique," *Nature*, vol. 224, pp. 166-167, 1969.
- [10] J. Rice y D. Tracey, "Computational fracture mechanics," en *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. Fenves, N. Perrone, A. Robinson y W. Schnobrich, directores, New York: Academic Press, pp. 585-623, 1973.
- [11] R. A. Gallagher, "Review of finite element techniques in fracture mechanics," en *Num. Meth. Frac. Mech., Proc. 1st Conf.*, Swansea: Pineridge Press, pp. 1-25, 1978.
- [12] D. Owen y A. Fawkes, *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Swansea, UK: Pineridge Press Ltd., 1983.
- [13] S. Atluri, *Computational Methods in the Mechanics of Fracture, Vol. 2 de Computational Methods in Mechanics*. North-Holland, Amsterdam: Elsevier Science, 1986.
- [14] I. Raju y J. Newman, Jr., "Methods for analysis of cracks in three-dimensional solids," *J. Aero. Soc. India*, vol. 36, pp. 153-172, 1984.
- [15] N. Moës, J. Dolbow y T. A. Belytschko, "Finite element method for crack growth without remeshing," *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 46, no. 1, pp. 131-150, 1999.
- [16] M. Sabsabi, "Modelado de grieta y estimación de vida en fretting fatiga mediante el método de los elementos finitos extendido X-FEM," tesis doctoral, Dep. Ing. Mec. y Mat., Univ. Pol. Val., Valencia, Esp., 2010.
- [17] J. L. Arana, J. J. González, *Mecánica de Fractura*. España: Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2002.
- [18] A.A. Griffith, "The phenomena of rupture and flow in solids," *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Series A*, vol. 221, pp. 163-198, 1921.
- [19] E. Orowan, "Fundamentals of brittle behavior of metals," en *Fatigue and Fracture of Metals*, New York: Wiley, W.M. Murray, Ed., pp. 139-167, 1952.
- [20] G. Sih, *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems, Vol. 1 de Mechanics of Fracture*. Leyden, Holanda: Noordho International Publishing, 1973.
- [21] D. Rooke, "The development of stress intensity factors," en *Fretting Fatigue*, R. Waterhouse y T. Lindley, directores,ESIS 18, Londres: Mechanical Engineering Publications, 1994, pp. 23-58.
- [22] D. Broek, *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1984.
- [23] T. Fett, *Stress Intensity Factors T-Stresses Weight Functions*. Karlsruhe: Universitätsverlag Karlsruhe, 2008.
- [24] B. Gross, J. E. Srawley, W. F. Brown, Jr, *Stress Intensity Factors for a Single-Edge Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function*. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1964.
- [25] B. A. Bilby, A. H. Cottrell, E. Smith y K. H. Swinden, "Plastic yielding from sharp notches," *Proc. Roy. Soc.*, vol. A 279, pp. 1-9, 1964.
- [26] B. A. Bilby y J. D. Eshelby, *Dislocations and the Theory of Fracture - Fracture I*. Liebowitz: Ed. Academic Press, 1969.
- [27] O. L. Bowie, "Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole," *J. Math. and Phys.*, vol. 25, pp. 60-71, 1956.
- [28] O. L. Bowie y D. M. Neal, "Modified mapping-collocation technique for accurate calculation of stress intensity factors," *Int. J. Fract. Mech.*, vol. 6, pp. 199-206, 1970.
- [29] ANSYS, Inc. (2016) USA. ANSYS Simulation driven product development. [En línea] Disponible: <http://www.ansys.com/>
- [30] Dassault Systemes (2016). Abaqus Unified FEA. [En línea] Disponible: <http://www.3ds.com/products-services/simulia/products/abaqus/>, consultado: febrero 2016.
- [31] Siemens Product Lifecycle Management Software, Inc. (2016). LMS Samcef Fracture Mechanics. [En línea] Disponible: http://www.plm.automation.siemens.com/en_us/products/lms/samtech/samcef-solver-suite/fracture-mechanics.shtml
- [32] Cnaero. (2016). Morfeo/Crack: A High-Fidelity Crack Propagation Software. [En línea] Disponible: <http://www.cnaero.be/Page.asp?docid=27328&langue=EN>, consultado: febrero de 2016.
- [33] ESRD, Inc. (2015) Fracture and Damage Tolerance [En línea] Disponible: <http://www.esrd.com/Solutions/Fracture.aspx>, consultado: febrero de 2016.
- [34] G. Kastratovic, A. Grbovic y N. Vidanovic. "Approximate method for stress intensity factors determination in case of multiple site damage," *App. Math. Modelling*, vol. 39, pp. 6050-6059, 2015.
- [35] E. Giner, N. Sukumar y F. J. Fuenmayor, "An Abaqus implementation of the extended finite element method," *Eng. Fracture Mechanics*, vol. 76, pp. 347-368, 2009.
- [36] M. Samaei, M. Zehsaz y T. N. Chakherlou. "Experimental and numerical study of fatigue crack growth of aluminum alloy 2024-T3 single lap simple bolted and hybrid (adhesive/bolted) joints," *Eng. Failure Analysis*, vol. 59, pp. 253-268, 2016.
- [37] S. Pirmohammad y A. Kiani. "Study on fracture behavior of HMA mixtures under mixed mode I/III loading," *Eng. Fracture Mechanics*, vol. 153, pp. 80-90, 2016.
- [38] P. Weißgraeber, J. Felger, D. Geipel y W. Becker. "Cracks at elliptical holes: stress intensity factor and finite fracture mechanics solution," *Eur. J. Mechanics A/Solids*, vol. 55, pp. 192-198, 2016.
- [39] M. J. Hammond y S. A. Fawaz. "Stress intensity factors of various size single edge-cracked tension specimens: A review and new solutions," *Eng. Fracture Mechanics*, vol. 153, pp. 25-34, 2016.
- [40] H. Liebowitz y E. T. Moyer, Jr., "Finite element methods in fracture mechanics," *Comp. & Struc.*, vol. 31, no. 1, pp. 1-9, 1989.
- [41] E. Giner, "Estimación del error de discretización en el cálculo del factor de intensidad de tensiones mediante elementos finitos," tesis doctoral, Dep. Ing. Mec. y Mat., Univ. Pol. Val., Valencia, España, 2001.
- [42] S. Lo y C. Lee, "Solving crack problems by an adaptive refinement procedure," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 43, no. 2, pp. 147-163, 1992.
- [43] F. Michavila y L. Gavete "Métodos numéricos para el estudio de singularidades en elasticidad lineal," en *Métodos Numéricos Aplicados a Mecánica de la Fractura*, J. Oliver, M. Elices, E. Oñate y M. Astiz, directores, Barcelona: CIMNE, 1988, pp. 1-25.
- [44] G. Carey y J. Oden, *Finite Elements: A Second Course, Vol. II de The Texas Finite Element Series*. NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [45] T. Belytschko y T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 45, no. 5, pp. 601-620, 1999.
- [46] G. Ventura, E. Budyn y T. Belytschko, "Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 58, pp. 1571-1592, 2003.
- [47] E. Giner, N. Sukumar, F. Denia y F. Fuenmayor, "Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation," *Int. J. Solid Struc.*, vol. 45, pp. 5675-5687, 2008.
- [48] G. Zi y T. Belytschko, "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 57, pp. 2221-2240, 2003.
- [49] Afgrow. (2013, Oct.). Methodology For Determining Stress Intensity Factors. [En línea] Disponible: http://www.afgrow.net/applications/DTDHandbook/pdfs%5C5C%5C11_2_0.pdf, consultado: octubre 2013.
- [50] S. Chan, I. Tuba y W. Wilson, "On the finite element method in linear fracture mechanics," *Eng. Frac. Mech.*, vol. 2, pp. 1-17, 1970.
- [51] S. Pu, M. Hussain y W. Lorensen, "The collapsed cubic isoparametric element as a singular element for crack problems," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 12, pp.1727-1742, 1978.
- [52] S. Ju, "Simulating three-dimensional stress intensity factors by the

- least-squares method," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 43, pp. 1437-1451, 1998.
- [53] C. E. Freese y F.I. Baratta, "Single edge-crack stress intensity factor solutions," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 73, pp. 616-625, 2006.
- [54] H. Bueckner, "A novel principle for the computation of stress intensity factors," *ZAMM*, vol. 50, pp. 529-546, 1970.
- [55] J. Rice, "Some remarks on elastic crack-tip stress fields," *Int. J. Solid Struc.*, vol. 8, pp. 751-758, 1972.
- [56] A. Vercher, "Mejora de los elementos de transición en XFEM aplicado a Mecánica de la Fractura Elástica Lineal," tesis doctoral, Dep. Ing. Mec. y Mat., Univ. Pol. Val., Valencia, España, 2010.
- [57] J. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks," *J. Applied Mech.*, vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [58] D. A. Fattori, "Evaluación de la integral J_2 y aplicación a problemas en modo mixto 2D de la mecánica de la fractura elástico-lineal," tesis de maestría, Dep. Ing. Mec. y Mat., Univ. Pol. Val., Valencia, Esp., 2009.
- [59] C. Cueto-Felgueroso, "Implantación del método de cálculo de la integral J sobre un dominio," *Anales de Mec. Frac.*, vol. 18, pp. 388-394, 2001.
- [60] F. Li, C. Shih y A. Needleman, "A comparison of methods for calculating energy release rates," *Eng. Frac. Mech.*, vol. 21, no. 2, pp. 405-421, 1985.
- [61] J. H. Kuang y L.S. Chen, "A single strain gage method for K_I measurement," *Eng. Frac. Mech.*, vol. 51, pp. 871-878, 1995.
- [62] H. Sarangi, K. S. R. K. Murthy y D. Chakraborty, "Optimum strain gage locations for accurate determination of the mixed mode stress intensity factors," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 88, pp. 63-78, 2012.
- [63] J. F. Doyle, J. W. Phillips, *Manual on Experimental Stress Analysis*. Society for Experimental Mechanics, 5th edition.
- [64] G. A. Papadopoulos, "Study of concentrated vertical load at the apex of a wedge by the experimental methods of caustics and photoelasticity," *Adv. and App. in Mech. Eng. and Tech.*, vol. 3, pp. 59-81, 2011.
- [65] S. Shen, T. Nishioka, "Theoretical development of the method of caustics for intersonically propagating interfacial crack," *Eng. Fracture Mech.*, vol. 70, pp. 643-655, 2003.
- [66] E. E. Gdoutos, "The optical method of caustics," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 79, pp. 68-77, 2016.

Jairo Andrés Grajales Herrera nació en Cali, Valle del Cauca, el 10 de octubre de 1988. Se graduó como Ingeniero Mecánico en la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia) en 2012, en la cual obtuvo mención como estudiante distinguido y la beca Jorge Roa Martínez. Ha trabajado en diversos proyectos de investigación en el área de vibraciones mecánicas, monitoreo de fallas y modelado de componentes mecánicos, además de proyectos en el área de transporte automotor de pasajeros por carretera. Es investigador activo en el área de análisis de vibraciones en motores de combustión interna y estudiante de la Maestría en Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira, institución en la cual se desempeña como profesor catedrático

Libardo Vicente Vanegas Useche nació en Pereira, Risaralda, el 20 de mayo de 1972. Se graduó como Ingeniero Mecánico en la Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira (Colombia) en 1994. Obtuvo el grado de M.Sc. en Advanced Manufacturing Technology and Systems Management en la University of Manchester, Manchester (Reino Unido) en 1999. Obtuvo el grado de Ph.D. en Mechanical Engineering en la University of Surrey, Guildford (Reino Unido) en 2008.

Fue Ingeniero de Fábrica en el Ingenio Central Sicarare S.A. y se desempeñó como Docente de Laboratorio y Elaborador de Páginas Web Educativas en la University of Surrey. Actualmente es Profesor Titular en la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Tecnológica de Pereira, La Julita, Pereira (Colombia). Fue Director del Primer Congreso Internacional sobre Tecnologías Avanzadas de Mecatrónica, Diseño y Manufactura AMDM en el año 2012. Ha publicado más de 55 trabajos científicos. Sus intereses de investigación incluyen mecánica de fractura, fatiga, diseño mecánico y modelado de elementos mecánicos mediante el método de elementos finitos.