

# Solución numérica de una ecuación de convección-difusión no local fraccionaria<sup>1</sup>

## Numerical solution of a non-local fractional convection-diffusion equation

F.C. Osorio, P. A. Amador y C. A. Bedoya

Recibido: septiembre 14 de 2023 – Aceptado: abril 29 de 2024

**Resumen**—En este artículo estudia la solución numérica de una ecuación de convección-difusión no local fraccionaria en el tiempo, definida en el sentido de Caputo. Las aproximaciones se desarrollan usando un esquema numérico explícito por medio del método de diferencias finitas. A partir de esta discretización y el método de Von Neumann, se establece la condición de estabilidad (CFL), con la cual se demuestran la propiedad de monotonía y la propiedad de variación total (TVD), así como algunas desigualdades importantes para la regularidad del esquema. Finalmente, se presentan algunos experimentos numéricos con un término fuente, para hallar las soluciones analíticas y realizar los cálculos respectivos de los errores y órdenes de convergencia con la aproximación numérica.

**Palabras clave**—Diferencias finitas, Molificación discreta, Derivada fraccional, ecuación no local.

**Abstract**—This article investigates the numerical solutions of a fractional non-local convection-diffusion equation in time, defined in the Caputo sense. The approximations are developed using an explicit numerical scheme through the finite difference method. Through this discretization and the Von Neumann method, the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) stability condition is established, which demonstrates the monotonicity property and the total variation diminishing (TVD) property, along with some important inequalities for the regularity of the scheme.

Finally, some numerical experiments with a source term are presented to find analytical solutions and perform the respective error calculations and convergence orders with the numerical approximation.

**Keywords**—Finite Differences, Discrete Mollification, Fractional Derivation, Nonlocal Equation.

### I. INTRODUCCIÓN

EL desarrollo de la teoría sobre ecuaciones diferenciales fraccionarias se convirtió en un tema de gran importancia, por sus numerosas aplicaciones en las ciencias y las ingenierías [1]-[5]. De esta forma, el objetivo de este artículo es desarrollar un método numérico para hallar soluciones aproximadas de la ecuación de Black-Scholes no local con derivada fraccional en el tiempo, basado en un esquema de diferencias finitas tanto para la derivada fraccional en el sentido de Caputo como para las derivadas espaciales. Además, en la discretización del término no local de la Ec. (1), se usará un kernel con las características de la molificación discreta de [6]. Esto permitirá aplicar las técnicas propuestas para las condiciones de borde de los datos faltantes en los extremos del intervalo de la aproximación.

En los recientes años, muchos autores se han dedicado a estudiar métodos de solución para este tipo de ecuaciones desde un enfoque analítico o numérico. Por ejemplo, en [7]-[12] se construyen soluciones analíticas para modelos no lineales de reacción-difusión o ecuaciones Fokker-Planck las cuales son usadas en la mecánica estadística esencialmente en el análisis del movimiento browniano. Otros trabajos desarrollan aproximaciones numéricas de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Por ejemplo, en [13] y [14] se construyen esquemas numéricos empleando el método de diferencias finitas para el término de difusión fraccional, donde la derivada se define en el sentido de Caputo. De manera similar, en [15] y [16] se considera la derivada de Caputo en ecuaciones no lineales, definiendo esquemas numéricos basados en el método de diferencias finitas. Otros estudios, como en [17]-[19], se aplican las derivadas fraccionarias para valores entre 1 y 2, utilizando

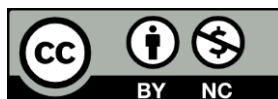
<sup>1</sup>Producto derivado del proyecto de investigación “Solución Numérica de la Ecuación de Difusión Fraccionaria”, apoyado por la Universidad Católica de Pereira a través de la Dirección de Investigación e Innovación.

F.C. Osorio, Universidad Católica de Pereira, Pereira, Colombia, email: fernan.osorio@ucp.edu.co.

P. A. Amador, Cali, Colombia, email: paamador@gmail.com.

C. A. Bedoya, Universidad Católica de Pereira, Pereira, Colombia, email: carlos.bedoya@ucp.edu.co.

**Como citar este artículo:** Osorio, F.C., Amador, P. A., y Bedoya, C. A. Solución Numérica de una ecuación de convección-difusión no local fraccionaria, *Entre Ciencia e Ingeniería*, vol. 18, no. 35, pp. 25-31, enero-junio 2024. DOI: <https://doi.org/10.31908/19098367.2954>.



discretizaciones de diferencias finitas para sus respectivas soluciones numéricas. Además, en [20], se desarrollan otros métodos mediante OHAM (Optimal Homotopy Asymptotic Method) para obtener un esquema numérico de una ecuación de reacción difusión fraccionaria, y en [21] se desarrollan soluciones de la ecuación de difusión fraccional en el espacio mediante el método de *lines* y *splines*.

Consideramos el siguiente problema de valor inicial,

$$\begin{cases} u_t^\alpha(x, t) = au_x(x, t) + bu_{xx}(x, t) + d \int_{\mathbb{R}} k(x-s)u(s, t)ds - du(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

De la misma manera que en [22] y [23], las constantes  $a, b, d \geq 0$ , y el kernel  $k(x)$  es una función simétrica que decae suavemente de  $[0, \infty]$  y  $\int_{\mathbb{R}} k(s)ds = 1$ . Además, se exige que la condición inicial sea Lipschitziana y  $L^1$ . Para la derivada fraccional en el tiempo se limita el valor  $0 < \alpha < 1$  con la definición en el sentido de Caputo, es decir:

$$u_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}.$$

El desarrollo del artículo se estructura de la siguiente forma: En la Sección II se construye el modelo numérico de la Ec. (1) usando diferencias finitas y la técnica de molicación discreta. Luego, en las Secciones III y IV se incluye las pruebas de estabilidad, regularidad, monotonía, propiedad TVD y las desigualdades relacionadas con la norma 1 y la norma  $\infty$ . En la Sección V, se desarrollan los experimentos numéricos para determinar los errores de la aproximación y ordenes de convergencia con diferentes  $\Delta x$ , y se finaliza con las conclusiones del trabajo.

## II. APROXIMACIÓN NUMÉRICA

Para la discretización de la ecuación (1) se define una malla en los puntos  $(x, t)$ . Tomando  $\Delta x > 0$  y  $\Delta t > 0$ , donde  $x_j = j\Delta x$  y  $t^n = n\Delta t$  para  $j \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ . Sustituyendo los anteriores valores en la Ec. (1), se obtiene que:

$$u_t^\alpha(x_j, t^n) = au_x(x_j, t^n) + bu_{xx}(x_j, t^n) + d \int_{\mathbb{R}} k(x_j-s)u(s, t^n)ds - du(x_j, t^n). \quad (2)$$

Para construir el esquema numérico de la Ec. (2) se plantea las siguientes discretizaciones: el término no local se aproxima por el método utilizado en [24]. De tal forma, se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} k(x_j-s)u(s, t^n)ds = \sum_{v=-\eta}^{\eta} u_{v+j}^n w_v + O(\Delta x), \quad (3)$$

donde,

$$w_v = \int_{I_v} k(\xi) d\xi, \quad \text{con } I_v = \left[ x_v - \frac{1}{2}\Delta x, x_v + \frac{1}{2}\Delta x \right].$$

La derivada fraccional en el tiempo se discretiza usando el método de diferencias finitas como en [24] y [25],

$$u_t^\alpha = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (u^{n+1} - b_n u_j^0 - \sum_{k=1}^n c_k u_j^{n+1-k}) + O(\Delta t^{2-\alpha}), \quad (4)$$

donde,  $b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$  y  $c_k = b_{k-1} - b_k$ .

Las aproximaciones para los términos de la convección y la difusión de la Ec. (2), se expresan de la siguiente forma:

$$u_x(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (5)$$

$$u_{xx}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (6)$$

Reemplazando las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) en la Ec. (2), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (u^{n+1} - b_n u_j^0 - \sum_{k=1}^n c_k u_j^{n+1-k}) + O(\Delta t^{2-\alpha}) &= a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + O(\Delta x) \\ &+ b \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \\ &+ d (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v u_{j+v}^n - u_j^n). \\ &+ O(\Delta x) \end{aligned} \quad (7)$$

De la ecuación (7) tenemos la siguiente discretización:

si,  $n = 0$

$$v_j^1 = v_j^0 + \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) + d\lambda (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^0 - v_j^0), \quad (8)$$

si,  $n \geq 1$

$$v_j^{n+1} = b_n v_j^n + \sum_{k=1}^n c_k v_j^{n+1-k} + \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + d\lambda (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^n - v_j^n), \quad (9)$$

donde,  $\lambda = \Gamma(2-\alpha)(\Delta t)^\alpha$ .

Es necesario reorganizar los esquemas numéricos de las Ec. (8) y Ec. (9), para facilitar las demostraciones de los lemas y la implementación de los experimentos numéricos. De tal forma que se obtengan las siguientes ecuaciones equivalentes:

si,  $n = 0$

$$v_j^1 = v_j^0 + \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) + d\lambda (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^0 - v_j^0). \quad (10)$$

si,  $n \geq 1$

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + d\lambda (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^n - v_j^n) - \sum_{k=1}^n b_k (v_j^{n-k+1} - v_j^{n-k}). \quad (11)$$

En los experimentos numéricos se empleará la siguiente discretización. Esto permitirá construir la matriz de condición de borde para los datos faltantes en los extremos de los intervalos donde se aproxima la solución.

si,  $n = 0$

$$v_j^1 = \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^0, \quad (12)$$

si,  $n \geq 1$

$$v_j^{n+1} = \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^n - b_1 v_j^n + \sum_{k=1}^{n-1} d_k v_j^{n-k} + b_n v_j^0, \quad (13)$$

donde  $d_k = b_k - b_{k+1}$ . Además,

$$\begin{aligned} \tilde{w}_v &= \lambda d w_v, \quad v = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \eta, \\ \tilde{w}_1 &= \lambda d w_1 + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} + \frac{a\lambda}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0 &= \lambda d w_0 - \lambda d - 2 \frac{b\lambda}{\Delta x^2} - \frac{a\lambda}{\Delta x} + 1, \\ \tilde{w}_{-1} &= \lambda d w_{-1} + \frac{b\lambda}{\Delta x^2}.\end{aligned}$$

$$\lambda \leq \frac{A \Delta x^2 c_1}{A^2 + (2dA + a^2) \Delta x^2}$$

(15)

donde,  $A = a\Delta x + 2b$ .

**Demostración.** Sea  $v_j^n = e^{i\theta j} g^n$ , reemplazando en el esquema numérico Ec. (9) se obtiene:

$$g^{n+1} = b_n g^0 + \sum_{k=1}^n c_k g^{n+1-k} + \left( i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta - \frac{2a\lambda}{\Delta x} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{4b\lambda}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + d\lambda K \right) g^n.$$

Debemos probar que  $|g^n| \leq |g^0|$ , primero se mostrara el caso  $n = 0$

$$g^1 = \left( 1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right) g^0,$$

donde  $\beta = \frac{2\lambda}{\Delta x} A$ . Aplicando el modulo a ambos lados de la ecuación anterior, se tiene que:

$$|g^1| = \left| 1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right| |g^0|.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\left| 1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right|^2 &= (1 + d\lambda K)^2 - 2\beta(1 + d\lambda K) \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\quad + \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + \frac{a^2 \lambda^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Como  $(1 + d\lambda K) \leq 1$ ,  $\sin(\theta) = 2\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $-2 \leq K \leq 0$  y dada la condición Ec. (14),

$$\begin{aligned}\left| 1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right|^2 &\leq 1 + \left[ -2\beta + 4d\lambda\beta + \beta^2 + 4 \frac{a^2 \lambda^2}{\Delta x^2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\leq 1 + 4\lambda \left[ -\frac{A}{\Delta x^2} + \frac{\lambda A c_1 A^2 + (2dA + a^2) \Delta x^2}{\Delta x^2 A \Delta x^2 c_1} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\leq 1 + \frac{4\lambda A}{\Delta x^2} [c_1 - 1] \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Asumimos que la desigualdad  $|g^n| \leq |g^0|$  se cumple hasta  $n$ . Probaremos para el caso  $n + 1$ .

Sea,

$$g^{n+1} = b_n g_j^0 + \sum_{k=1}^n c_k g^{n+1-k} + \left( i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta - \frac{2a\lambda}{\Delta x} \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{4b\lambda}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + d\lambda K \right) g^n,$$

Aplicando el modulo en la ecuación anterior, obtenemos la desigualdad

$$|g^{n+1}| \leq b_n |g^0| + \sum_{k=2}^n c_k |g^{n+1-k}| + \left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right| |g^n|.$$

Por inducción,

$$|g^{n+1}| \leq \left( b_n + \sum_{k=2}^n c_k + \left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right| \right) |g^0|,$$

A continuación, se probará el lema 2.1 para la aproximación numérica en las Ec. (10) y Ec. (11). Este lema garantiza que el esquema propuesto tiene la propiedad de conservación, característica importante en las soluciones de los problemas de aplicación, condición que se debe mantener en las aproximaciones numéricas.

**Lema 2.1** (Ley de conservación) El esquema numérico de la Ec. (10) y Ec. (11) tiene la forma conservativa:

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \lambda(\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n),$$

para  $n = 0$

$$\varphi_j^0 = \frac{a}{\Delta x} v_j^0 + \frac{b}{\Delta x^2} (v_j^0 - v_{j-1}^0) + d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k-1}^0 - v_{j-k}^0),$$

para  $n \geq 1$

$$\varphi_j^n = \frac{a}{\Delta x} v_j^n + \frac{b}{\Delta x^2} (v_j^n - v_{j-1}^n) + d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k-1}^n - v_{j-k}^n) - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_j^{n-k}.$$

**Demostración.** Probaremos primero el caso para  $n = 0$ , sea

$$v_j^1 - v_j^0 = \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) + d\lambda \left( \sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^0 - v_j^0 \right).$$

$$v_j^1 - v_j^0 = \lambda \left( \frac{a}{\Delta x} v_{j+1}^0 + \frac{b}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k}^0 - v_{j-k+1}^0) - \frac{a}{\Delta x} v_j^0 - \frac{b}{\Delta x^2} (v_j^0 - v_{j-1}^0) - d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k-1}^0 - v_{j-k}^0) \right),$$

$$v_j^1 - v_j^0 = \lambda(\varphi_{j+1}^0 - \varphi_j^0).$$

Suponemos que para los  $m = 1, \dots, n-1$  la igualdad se cumple. Ahora los probaremos para  $m = n$ .

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^n - v_j^n) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + d\lambda \left( \sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^n - v_j^n \right) - \sum_{k=1}^n b_k (v_j^{n-k+1} - v_j^{n-k})$$

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \lambda \left( \frac{a}{\Delta x} v_{j+1}^n + \frac{b}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - v_j^n) + d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k}^n - v_{j-k+1}^n) - \sum_{k=1}^n b_k \varphi_{j+1}^{n-k} - \frac{a}{\Delta x} v_j^n - \frac{b}{\Delta x^2} (v_j^n - v_{j-1}^n) - d \sum_{v=1}^{\eta} w_v \sum_{k=1}^{\nu} (v_{j+k-1}^n - v_{j-k}^n) + \sum_{k=1}^n b_k \varphi_j^{n-k} \right),$$

$$v_j^{n+1} - v_j^n = \lambda(\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n).$$

### III. ESTABILIDAD

En esta sección analizaremos la estabilidad del esquema en la Ec. (9), mediante el método de Von Neumann para diferencias finitas bajo las siguientes condiciones:

$$\sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v = 1, \quad \tilde{w}_v > 0 \quad \text{y} \quad \tilde{w}_0 - b_1 > 0,$$

$$\text{donde, } K = \sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v \cos(s\Delta x v) - 1 \quad \text{y} \quad c_1 = 2 - 2^{1-\alpha}. \quad (14)$$

**Lema 2.2** El esquema en la ecuación (9) es estable bajo las condiciones Ec. (14) y

Tenemos que,

$$\left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right|^2 = (c_1 + d\lambda K)^2 - 2\beta(c_1 + d\lambda K) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \beta^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} + \frac{a^2 \lambda^2}{\Delta x^2} \sin^2 \theta$$

De las siguientes condiciones  $(c_1 + d\lambda K) \leq c_1^2$ ,  $\sin(\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ ,  $-2 \leq K \leq 0$  y de Ec. (14), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right|^2 \leq c_1^2 + \left[ -2\beta + 4d\lambda\beta + \beta^2 + 4 \frac{a^2 \lambda^2}{\Delta x^2} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right|^2 \leq c_1^2 + 4\lambda \left[ -\frac{Ac_1}{\Delta x^2} + \frac{\lambda Ac_1 A^2 + (2dA + a^2)\Delta x^2}{A\Delta x^2 c_1} \right] \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq c_1^2.$$

Por lo tanto,

$$b_n + \sum_{k=2}^n c_k + \left| c_1 + d\lambda K - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} + i \frac{a\lambda}{\Delta x} \sin \theta \right| \leq b_n + \sum_{k=2}^n c_k + c_1 \leq 1.$$

#### IV. MONOTONÍA

A continuación, se probará la monotonía del esquema numérico, así como las condiciones de regularidad y TVD. Definimos la monotonía del esquema de aproximación de la siguiente forma: Sean dos discretizaciones de Ec. (13)  $v_j^0$  y  $u_j^0$ , se dice que el método es monótono si satisface

$$v_j^0 \leq u_j^0 \text{ si para todo } j, \text{ se tiene que } v_j^n \leq u_j^n.$$

**Lema 4.1** El esquema numérico en la Ec. (13), es monótono bajo la condición CFL.

**Demostración.** Suponemos que  $v_j^0 \leq u_j^0$ , probemos el sistema para  $n = 1$ , tenemos que:

$$v_j^1 - u_j^1 = \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v}^0 - u_{j+v}^0), \geq 0.$$

Vamos a suponer que para  $k = n$  se cumple la monotonía del sistema. Probaremos el caso  $k = n + 1$ .

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} - u_j^{n+1} &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v}^n - u_{j+v}^n) - b_1 (v_j^n - u_j^n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k (v_j^{n-k} - u_j^{n-k}) + b_n (v_j^0 - u_j^0), \\ &= \sum_{v=1}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v}^n - u_{j+v}^n) + \sum_{v=1}^{\eta} \tilde{w}_{-v} (v_{j+v}^n - u_{j+v}^n) + (\tilde{w}_0 - b_1) (v_j^n - u_j^n) + \sum_{k=1}^{n-1} c_k (v_j^{n-k} - u_j^{n-k}) + b_n (v_j^0 - u_j^0). \end{aligned}$$

bajo las condiciones CFL tenemos que,  $v_j^{n+1} - u_j^{n+1} \geq 0$ .

Ahora demostraremos algunas propiedades de regularidad de del esquema numérico.

**Lema 4.2** Bajo la condición de estabilidad se cumple la propiedad TVD.

**Demostración.** Probemos el caso  $n = 0$ , tenemos que,

$$v_j^1 = \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^0,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^1 - v_j^1| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v+1}^0 - v_{j+v}^0) \right|, \\ &\leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+v+1}^0 - v_{j+v}^0|, \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+v+1}^0 - v_{j+v}^0|. \end{aligned}$$

Suponemos que se cumple la propiedad TVD para los valores  $1, \dots, n-1$ . Ahora en el caso  $n$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v+1}^n - v_{j+v}^n) - b_1 (v_{j+1}^n - v_j^n) + \sum_{k=1}^{n-1} d_k (v_{j+1}^{n-k} - v_j^{n-k}) + b_n (v_{j+1}^0 - v_j^0) \right|. \end{aligned}$$

El término  $-b_1(v_{j+1}^n - v_j^n)$  se puede agrupar con  $\tilde{w}_0$ , de tal forma que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| &\leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+v+1}^n - v_{j+v}^n| + \sum_{k=1}^{n-1} d_k \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n-k} - v_j^{n-k}| + b_n \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0|. \end{aligned}$$

Por inducción,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq (1 - b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k + b_n) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0|,$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0|.$$

**Lema 4.3** Bajo la condición de estabilidad se cumplen las siguientes desigualdades.

$$\|v^n\|_{\infty} \leq \|v^0\|_{\infty}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

$$\|v^n\|_1 \leq \|v^0\|_1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

**Demostración.** Para  $n = 0$  el esquema en la Ec. (13) toma la siguiente forma

$$v_j^1 = \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^0,$$

tenemos que,

$$|v_j^1| = \left| \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^0 \right| \leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v \|v_j^0\|_{\infty}.$$

Por inducción suponemos que se cumple para  $n = 1, \dots, N-1$ , ahora lo probaremos para  $n = N$

$$|v_j^{N+1}| = \left| \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^N - b_1 v_j^N + \sum_{k=1}^{N-1} d_k v_j^{N-k} + b_N v_j^0 \right|.$$

De la misma forma que el Lema 4.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} |v_j^{N+1}| &\leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v |v_{j+v}^N| + \sum_{k=1}^{N-1} d_k |v_j^{N-k}| + b_N |v_j^0|, \\ &\leq (1 - b_1 + \sum_{k=1}^{N-1} d_k + b_N) \|v^0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\|v^n\|_\infty \leq \|v^0\|_\infty$ .

La demostración para la desigualdad  $\|v^n\|_1 \leq \|v^0\|_1$  es similar a la prueba de la propiedad TVD.

**Lema 4.4** Bajo la condición CFL, se cumple que

$$\sum_j |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \frac{\lambda}{\Delta x} C_1 + \lambda C_2,$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes que no dependen de  $\Delta t$  y  $\Delta x$ .

**Demostración.** Se demostrara primero la desigualdad

$$\sum_j |v_j^{n+1} - v_j^n| \leq \sum_j |v_j^1 - v_j^0|. \quad (16)$$

Para  $n = 1$

$$\begin{aligned} v_j^2 - v_j^1 &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^1 - b_1(v_j^1 - v_j^0) - \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v v_{j+v}^0, \\ &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v (v_{j+v}^1 - v_{j+v}^0). \end{aligned}$$

Donde  $\tilde{w}_0 = \lambda d w_0 - \lambda d - 2 \frac{b\lambda}{\Delta x^2} - \frac{a\lambda}{\Delta x} + 1 - b_1$ ,

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_j |v_j^2 - v_j^1| &\leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v \sum_j |v_j^1 - v_j^0|, \\ &\leq \sum_j (v_j^1 - v_j^0). \end{aligned}$$

Suponemos que para valores hasta  $n - 1$ , se cumple que

$$\sum_j |v_j^n - v_j^{n-1}| \leq \sum_j |v_j^1 - v_j^0|.$$

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} - v_j^n &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_i (v_{j+v}^n - v_{j+v}^{n-1}) - b_1(v_j^n - v_j^{n-1}) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} d_k v_j^{n-k} - \sum_{k=1}^{n-2} d_k v_j^{n-1-k} - (b_n - b_{n-1})v_j^0, \\ &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_i (v_{j+v}^n - v_{j+v}^{n-1}) + \sum_{k=1}^{n-1} d_k (v_j^{n-k} - v_j^{n-1-k}). \end{aligned}$$

De igual forma que en el caso  $n = 1$ , se tiene que

$$\tilde{w}_0 = \lambda d w_0 - \lambda d - 2 \frac{b\lambda}{\Delta x^2} - \frac{a\lambda}{\Delta x} + 1 - b_1.$$

Obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \sum_j |v_j^{n+1} - v_j^n| &\leq \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_i \sum_j |v_{j+v}^n - v_{j+v}^{n-1}| + \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} d_k (v_j^{n-k} - v_j^{n-1-k}) \\ &\leq (\sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v + \sum_{k=1}^{n-1} d_k) \sum_j |v_j^1 - v_j^0|, \\ &\leq (1 - b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} d_k) \sum_j |v_j^1 - v_j^0|, \\ &\leq \sum_j |v_j^1 - v_j^0|. \end{aligned}$$

Finalmente, de la Ec. (12) implica que

$$\begin{aligned} v_j^1 - v_j^0 &= \sum_{v=-\eta}^{\eta} \tilde{w}_v - v_j^0, \\ &= \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) + \\ &\quad d\lambda (\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^0 - v_j^0). \end{aligned}$$

Como en [9], tenemos que  $\rho_k = \sum_{v=k}^{\eta} w_v$ , donde  $k = -\eta, \dots, \eta$ , de tal forma podemos escribir como:

$$\sum_{v=-\eta}^{\eta} w_v v_{j+v}^0 - v_j^0 = \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (v_{j+k}^0 - v_{j+k-1}^0) + \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (v_{j-k}^0 - v_{j-k+1}^0).$$

de modo que,

$$\begin{aligned} v_j^1 - v_j^0 &= \frac{a\lambda}{\Delta x} (v_{j+1}^0 - v_j^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} (v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0) \\ &\quad + d\lambda (\sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (v_{j+k}^0 - v_{j+k-1}^0) + \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k (v_{j-k}^0 - v_{j-k+1}^0)), \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_j |v_j^1 - v_j^0| &\leq \frac{a\lambda}{\Delta x} \sum_j |v_{j+1}^0 - v_j^0| + \frac{b\lambda}{\Delta x^2} \sum_j |v_{j+1}^0 - 2v_j^0 + v_{j-1}^0| \\ &\quad + 2d\lambda \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k \sum_j |v_{j+1}^0 - v_j^0|, \\ &\leq \frac{a\lambda}{\Delta x} T v(v^0) + \frac{b\lambda}{\Delta x} M + 2d\lambda T v(v^0) \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k. \end{aligned}$$

Tenemos que,

$$\sum_j |v_j^1 - v_j^0| \leq \frac{\lambda}{\Delta x} C_1 + \lambda C_2,$$

donde  $C_1 = a \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k + bM$  y  $C_2 = 2dTv(v^0) \sum_{k=1}^{\eta} \rho_k$ . De esta forma reemplazando en la Ec. (16) completamos la prueba.

## V. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

En los experimentos numéricos se adiciona un término fuente en la Ec. (1). Usando esta nueva expresión podemos obtener una solución exacta del problema, y así realizar el respectivo análisis de error y de orden de convergencia mediante el esquema en la Ec. (13). Este análisis se realizó para valores de  $\alpha$  iguales a 0.7, 0.8 y 0.9 en la derivada de Caputo. Las condiciones iniciales se aproximan a cero en los extremos del intervalo de la variable espacial, donde se pretende encontrar la solución numérica. La condición anterior se debe implementar con el fin de usar la matriz de condición de borde de cero propuestas en [6] y [22], para compensar los datos faltantes en los límites del intervalo.

Vamos a considerar la siguiente ecuación de Convección-Difusión no local con derivada fraccional en el tiempo para los experimentos numéricos:

$$u_t^\alpha(x, t) = a u_x(x, t) + b u_{xx}(x, t) + d \int_{\mathbb{R}} k(x-s) u(s, t) ds - du(x, t) + f(x, t),$$

Donde,  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

A continuación encontramos los ejemplos con las tablas y gráficas respectivas, que verifica el comportamiento de la aproximación numérica y el orden de convergencia 1 del esquema en la Ec. (7).

**Ejemplo 5.1** Sean  $a = 1$ ,  $b = 0.001$ ,  $d = 1$  y el tiempo  $T = 1$ . Consideramos un intervalo en  $x$  de  $[0, 1]$ , el kernel  $k(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2)$  y el término fuente

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} x(1-x) - t^2 (a(1-2x) + 2b + \\ &\quad d \int_{\mathbb{R}} k(x-s) s(1-s) ds - x(1-x)) \end{aligned}$$

El problema anterior tiene la solución exacta:  $u(x, t) = t^2 x(1-x)$

A continuación se muestra la Tabla I de errores para diferentes valores de  $\alpha$ , y la Fig. 1 con la comparación de la solución exacta y la aproximación numérica para  $\Delta x = \frac{1}{64}$ .

TABLA I  
ERRORES Y ÓRDENES DEL EJEMPLO 5.1.

$\Delta x$	$\alpha = 0.7$		$\alpha = 0.8$		$\alpha = 0.9$	
	$L_\infty$ error	Orden	$L_\infty$ error	Orden	$L_\infty$ error	Orden
1/16	1.72E-02	-	2.57E-02	-	2.58E-02	-
1/32	5.73E-03	1.59	7.14E-03	1.85	9.26E-03	1.48
1/64	2.62E-03	1.13	2.81E-03	1.34	3.57E-03	1.37
1/128	1.22E-03	1.11	1.22E-03	1.20	1.35E-03	1.41

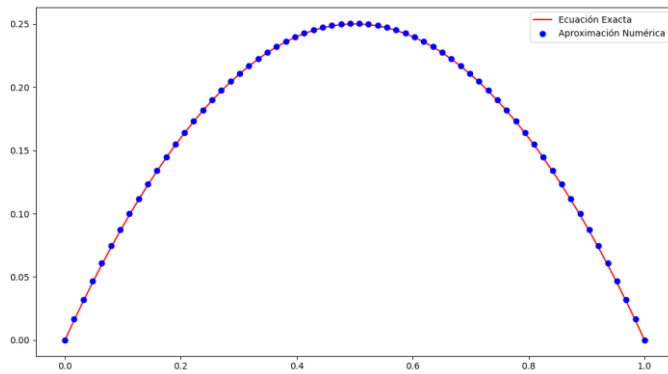


Fig. 1. Ejemplo 5.1, Tiempo  $T=1$ .

**Ejemplo 5.2** Sean  $a = 1$ ,  $b = 0.001$ ,  $d = 1$  y el tiempo  $T = 1$ . Consideramos un intervalo en  $x$  de  $[0,1]$ , el kernel  $k(x) = \sqrt{\frac{100}{\pi}} \exp(-100x^2)$  y el término fuente,

$$f(x, t) = \left( \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} + \frac{2}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} t^{1-\alpha} \right) 10x^2(1-x) - (t+1)^2(10ax(1-x) + 20b(1-3x) + d \int_{\mathbb{R}} k(x-s)s^2(1s)ds - 10x^2(1-x)).$$

El problema anterior tiene la solución exacta:

$$u(x, t) = 10x^2(1-x)(t+1)^2$$

A continuación se muestra la Tabla II de errores para diferentes  $\alpha$ , y la Fig. 2 con la comparación de la solución exacta y la aproximación numérica para  $\Delta x = \frac{1}{32}$ .

TABLA II  
ERRORES Y ÓRDENES DEL EJEMPLO 5.2.

$\Delta x$	$\alpha = 0.7$		$\alpha = 0.8$		$\alpha = 0.9$	
	$L_\infty$ error	Orden	$L_\infty$ error	Orden	$L_\infty$ error	Orden
1/16	2.14E-02	-	2.52E-02	-	2.48E-02	-
1/32	8.99E-03	1.25	9.60E-03	1.39	1.05E-02	1.24
1/64	4.23E-03	1.09	4.33E-03	1.15	4.68E-03	1.17
1/128	1.99E-03	1.09	2.00E-03	1.11	2.06E-03	1.18

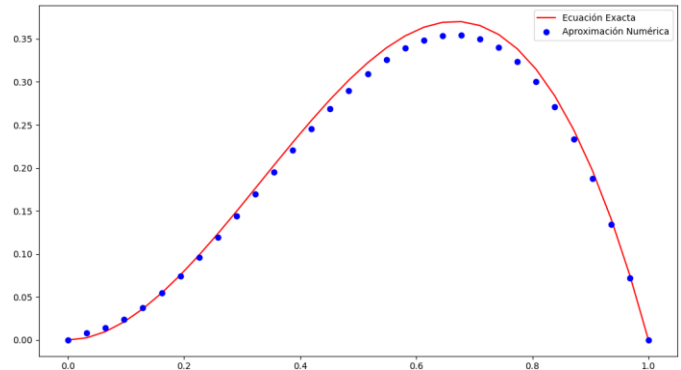


Fig. 2. Ejemplo 5.2, Tiempo  $T=1$ .

## VI. CONCLUSIONES

A partir del estudio realizado, se obtuvo un esquema numérico explícito con orden de convergencia 1. En el desarrollo del método numérico se probaron la ley de conservación, la monotonía y la propiedad TVD, además de otras propiedades que son necesarias, pero no suficientes en la convergencia del esquema. Los experimentos numéricos coinciden con el desarrollo teórico del método. Sin embargo, se observó que el algoritmo de aproximación tiene un costo computacional alto debido a la condición CFL. Por esta razón, se optó por utilizar valores pequeños del parámetro  $\alpha$ , lo que permitió reducir los tiempos de ejecución y los requerimientos computacionales.

La derivada fraccional temporal en el sentido de Caputo requiere que se almacenen todos los valores  $v_j^n$  para el cálculo del siguiente término  $v_j^{n+1}$ , esto genera una carga significativa en la memoria de la computadora durante la ejecución de la rutina.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad Católica de Pereira por su apoyo en el desarrollo de la propuesta de investigación.

## REFERENCIAS

- [1] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., and Trujillo, J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204. Elsevier, 2006.
- [2] Sene, N., (2022), “Analytical solutions of a class of fluids models with the Caputo fractional derivative”, *Fractal and Fractional*, 6(1), p. 35.
- [3] Zafar, Z. U. A., Zaib, S., Hussain, M. T., Tunç, C., and Javeed, S., (2022), “Analysis and numerical simulation of tuberculosis model using different fractional derivatives”, *Chaos Solitons Fractals*, 160, 112202.
- [4] Erturk, V. S., Ahmadkhanlu, A., Kumar, P., and Govindaraj, V., (2022) “Some novel mathematical analysis on a corneal shape model by using Caputo fractional derivative”, *Optik (Stuttg)*, 261, 169086.
- [5] Vellappandi, M., Kumar, P., Govindaraj, V., and Albalawi, W., (2022), “An optimal control problem for mosaic disease via Caputo fractional derivative”, *Alexandria Engineering Journal*, 61(10), pp. 8027–8037.
- [6] Acosta, C. D. and Mejía, C. E., “Stable computations by discrete mollification”, 2014.
- [7] Abdel-Rehim, E. A., (2016), “Fundamental solutions of the fractional diffusion and the fractional Fokker–Planck equations”, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24(3), pp. 337–347.
- [8] Kaplan, M. y Bekir, A., (2016), “A novel analytical method for time-fractional differential equations”, *Optik (Stuttg)*, 127(20), pp. 8209–8214.
- [9] Khan, N. A., Khan, N. U., Ara, A., and Jamil, M., (2012), “Approximate analytical solutions of fractional reaction-diffusion equations”, *Journal of King Saud University-Science*, 24(2), pp. 111–118.
- [10] Lenzi, E. K., dos Santos, M. A. F., Lenzi, M. K., Vieira, D. S., and da Silva, L. R., (2016), “Solutions for a fractional diffusion equation: anomalous diffusion and adsorption–desorption processes”, *Journal of King Saud University-Science*, 28(1), pp. 3–6.
- [11] Thabet, H. and Kendre, S., (2018), “Analytical solutions for conformable space-time fractional partial differential equations via fractional differential transform”, *Chaos Solitons Fractals*, 109, pp. 238–245.
- [12] Bayrak, M. A. and Demir, A., (2018), “A new approach for space-time fractional partial differential equations by residual power series method”, *Appl Math Comput*, 336, pp. 215–230.
- [13] Zhang, J., Zhang, X., and Yang, B., (2018), “An approximation scheme for the time fractional convection–diffusion equation”, *Appl Math Comput*, 335, pp. 305–312.
- [14] Bisci, G. M. and Servadei, R., (2015), “A Brezis–Nirenberg splitting approach for nonlocal fractional equations”, *Nonlinear Anal Theory Methods Appl*, 119, pp. 341–353.
- [15] Li, L., Zhou, B., Chen, X., and Wang, Z., (2018), “Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction–diffusion equations with delay”, *Appl Math Comput*, 337, pp. 144–152.
- [16] Yuste, S. B. and Acedo, L., (2005), “An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations”, *SIAM J Numer Anal*, 42(5), pp. 1862–1874.
- [17] Agarwal, P. and El-Sayed, A. A., (2018), “Non-standard finite difference and Chebyshev collocation methods for solving fractional diffusion equation”, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 500, pp. 40–49.
- [18] Takeuchi, Y., Yoshimoto, Y., and Suda, R., (2017), “Second order accuracy finite difference methods for space-fractional partial differential equations”, *J Comput Appl Math*, 320, pp. 101–119.
- [19] Wei, L., (2017), “Analysis of a new finite difference/local discontinuous Galerkin method for the fractional diffusion-wave equation”, *Appl Math Comput*, 304, pp. 180–189.
- [20] Ali, S., Bushnaq, S., Shah, K., and Arif, M., (2017), “Numerical treatment of fractional order Cauchy reaction diffusion equations”, *Chaos Solitons Fractals*, 103, pp. 578–587.
- [21] Salehi, Y., Darvishi, M. T., and Schiesser, W. E., (2018), “Numerical solution of space fractional diffusion equation by the method of lines and splines”, *Appl Math Comput*, 336, pp. 465–480.
- [22] Acosta, C. D. and Osorio, F. C., (2015), “Numerical solution of the non-local Black-Scholes model by means of discrete mollification”, *Revista Integración*, 33(2), pp. 145–160.
- [23] Bhowmik, S. K., (2014), “Fast and efficient numerical methods for an extended Black–Scholes model”, *Computers & Mathematics with Applications*, 67(3), pp. 636–654.
- [24] Acosta, C. D., Amador, P. A., and Mejía, C. E., “Stability analysis of a finite difference scheme for a nonlinear time fractional convection diffusion equation”, in *Analysis, Modelling, Optimization, and Numerical Techniques*, San Andres Island, ICAMI, Springer, Nov. 2013, 2015, pp. 139–150.
- [25] Shen, S., Liu, F., Anh, V., and Turner, I., (2006), “Detailed analysis of a conservative approximation for the time fractional diffusion equation”, *J Appl Math Comput*, 22, pp. 1–19.



**Fernán Camilo Osorio Guzmán.** Profesor de la Universidad Católica de Pereira, profesional. Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, y Magister en Ciencias Matemáticas Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4997-0369>



**Pedro Alejandro Amador.** Matemático y Magister en Ciencias Matemáticas Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. Áreas de estudio son los métodos numéricos en ecuaciones diferenciales parciales.

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2549-7866>



**Carlos Andrés Bedoya Parra.** Profesor de la Fundación Universitaria Comfamiliar Risaralda, Ingeniero Electricista y Magister Administración Económica y Financiera Física de la Universidad Tecnológica de Pereira.

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2933-4402>